数学散歩　Ⅱ－０　　　　　　　　　２０１５．８．α　　岐阜市　村山錞司

＜「数学散歩　Ⅱ-1～20」　の問題の抜粋とまとめ＞

―　代数学と幾何学（矢野健太郎　裳華房）を読み直して　―

上の本は50年ほど前、大学の１年生の授業で学んだ数学の演習書の中の１冊です。

本棚に残っていたもので（昭和37年4月10日　第9版発行　定価380円）となっています。ネットで検索したら（復刊　2014年7月8日現在　定価4104円（本体3800円＋税））とでていました。

第１章 複素数　～　第１２章　２次曲面 からなっていて、索引まで含めて約300ページあります。

（以上、「Ⅱ-1」 の冒頭の文から再掲）

苦労した問題などを選んでまとめました。楽しめる問題もあり、是非、挑戦して遊んでください。

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

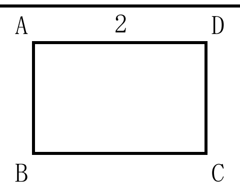
◎　最初に目覚ましの問題（上記の本とは無関係）

ワラ半紙（長方形）の長い方の長さ(AD)を２ としたとき、ワラ半紙を適当に折って、

$\sqrt{1} = 1$、$\sqrt{2}$ 、$\sqrt{3}$、

$\sqrt{4} = 2$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{6}$

の長さを作ってください。



問題いろいろ（表現の修正や「・・・証明せよ。」の省略などあり。）

「Ⅱ-1 から」

第１章　複素数

＜17ｐ＞　　演習問題　１０

$|z_1| = |z_2| = |z_3|$　　とすれば、三角形 $z_1z_2z_3$ の垂心は $z_1 + z_2 + z_3$ であることを示せ。

また、九点円の中心は　$\dfrac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3)$　で表されることを示せ。

＜283p＞　　補充問題　６

z_1、z_2、z_3、z_4 を複素数とすれば、　$|z_1-z_2||z_3-z_4|+|z_1-z_4||z_2-z_3| \geqq |z_1-z_3||z_2-z_4|$ であることを示せ。

「Ⅱ-2 から」

第２章　多項式と方程式

＜42p＞　　問題２９

$x^3-3x-1=0$　の一つの根がαならば、他の二根は　$\alpha^2-\alpha-2$、$2-\alpha^2$　である。

（問題A）　　（追加した問題）

３次方程式 $x^3-3x-1=0$ を解いて、３つの根が、　α、$\alpha^2-\alpha-2$、$2-\alpha^2$ になることを示せ。

＜284p＞　　補充問題　５

１の相異なるｎ乗根を１、ω、ω^2、・・・・、ω^{n-1} とするとき、

$(1-\omega)(1-\omega^2)\cdots\cdots(1-\omega^{n-1})=n$　である。

補充問題　８

$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$　を因数分解せよ。

「Ⅱ-3 から」

第３章　ベクトル

＜285p＞　　補充問題　５

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & y & z \\ 3x^2 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & z \\ x^3 & 3y^2 & z^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & y & 1 \\ x^3 & y^3 & 3z^2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$ を証明せよ。

第４章　行列式

＜98p＞　　演習問題２（４）（証明せよ。）

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

＜285p＞　補充問題　２（３）　（証明せよ。）

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2+1$$

「Ⅱ-4 から」

第５章　行　列

＜286p＞　　補充問題　３

$$A=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{pmatrix}$$ のとき　$(E-A)(E+A)^{-1}$ を求む。

（答え）

$$(E-A)(E+A)^{-1}=\frac{1}{1+a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}1-a^2-b^2+c^2 & -2a-2bc & -2b+2ca\\ 2a-2bc & 1-a^2+b^2-c^2 & -2c-2ab\\ 2b+2ca & 2c-2ab & 1+a^2-b^2-c^2\end{pmatrix}$$

第６章　平面上の点の位置

＜152p＞　　問題４１＜一般の変換＞

原点を点$(x_0\,,\ y_0)$に移し、次に角θだけ回転する。

変換 $\begin{cases} x=x'+x_0=\ \mathbf{x}\cos\theta-\mathbf{y}\sin\theta+x_0=\lambda_1\mathbf{x}+\lambda_2\mathbf{y}+x_0\\ y=y'+y_0=\ \mathbf{x}\sin\theta+\mathbf{y}\cos\theta+y_0=\mu_1\mathbf{x}+\mu_2\mathbf{y}+y_0\end{cases}$

によって　$F=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ が

$\mathbf{F}=\mathbf{a}\mathbf{x}^2+2\mathbf{hxy}+\mathbf{by}^2+2\mathbf{gx}+2\mathbf{fy}+\mathbf{c}$　　になるとき、

(1)　$\mathbf{a}+\mathbf{b}=a+b$

(2)　$\mathbf{ab}-\mathbf{h}^2=ab-h^2$

(3)　$\begin{vmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{h} & \mathbf{g}\\ \mathbf{h} & \mathbf{b} & \mathbf{f}\\ \mathbf{g} & \mathbf{f} & \mathbf{c}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & h & g\\ h & b & f\\ g & f & c\end{vmatrix}$

＜287p＞　　補充問題　４

一直線上で、２次方程式 $ax^2+bx+c=0$、$px^2+qx+r=0$ の根をそれぞれ座標とする二組の点対が互に他を調和に分かつための条件は　　$ar+pc-\frac{1}{2}bq=0$　であることを示せ。

「Ⅱ-5 から」

第７章　平面上の直線

＜三角形の五心（垂心、重心、外心、内心、傍心）＞

できれば「代数」、「幾何」の両面で（複素数、ベクトル、その他でも）証明してみてください。

＜168p＞　　例１５（垂心）

三角形の頂点から対辺に下した三つの垂線は一点に会する。

＜169p＞　　問題４３（重心）

三角形の三中線は一点に会する。

問題４４（外心）

三角形の各辺の垂直二等分線は一点に会する。

問題４５（内心）

三角形の三つの内角の二等分線は一点に会する。

＜170p＞　　問題４６（傍心）

三角形の一つの内角と、これに隣らざる他の二つの外角の二等分線は一点に会する。

＜172p＞　　演習問題　４

三角形の三つの外角の二等分線が対辺と交わる点は一直線上にある。

演習問題　５（チェバの定理、メネラウスの定理）

三角形 ABC の辺 BC 、CA 、AB 上に、それぞれ　$\frac{BP}{PC}=\lambda$、$\frac{CQ}{QA}=\mu$、$\frac{AR}{RB}=\nu$　となるような点P、Q、Rをとるとき、三直線 AP、BQ、CR が一点に会する条件は$\lambda\mu\nu=+1$ 、三点 P、Q、R が一直線上にある条件は条件は$\lambda\mu\nu=-1$ である。

＜288p＞　　補充問題　８（デザルグの定理）

$\triangle A_1B_1C_1$　と$\triangle A_2B_2C_2$ において、もし　A_1A_2 、B_1B_2 、C_1C_2　が一点に会すれば、B_1C_1 と B_2C_2 、C_1A_1 と C_2A_2 、A_1B_1 と A_2B_2　の交点は一直線上に ある。また、この逆はどうか。

「Ⅱ-6 から」

第８章　空間の点の位置

＜180p＞　　問題１２　　＜要の問題＞

互に直交する三つの有向直線の方向余弦をそれぞれ(λ_1,μ_1,ν_1)、(λ_2,μ_2,ν_2)、(λ_3,μ_3,ν_3)とすれば、$\lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2=1$、$\lambda_2^2+\mu_2^2+\nu_2^2=1$、$\lambda_3^2+\mu_3^2+\nu_3^2=1$、

$\lambda_2\lambda_3+\mu_2\mu_3+\nu_2\nu_3=0$、$\lambda_3\lambda_1+\mu_3\mu_1+\nu_3\nu_1=0$、$\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2=0$

である。このとき、

$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=1$、$\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2=1$、$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1$、

$\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2+\mu_3\nu_3=0$、$\nu_1\lambda_1+\nu_2\lambda_2+\nu_3\lambda_3=0$、$\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3=0$

であることを証明せよ。

＜187p＞　　問題２５、２６　＜座標軸の平行移動＞

座標軸の平行移動　$x=\mathbf{x}+x_0$、$y=\mathbf{y}+y_0$、$z=\mathbf{z}+z_0$　によって、
$F = ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2lx+2my+2nz+d$　が
$\mathbf{F} = \mathbf{a}\mathbf{x}^2+\mathbf{b}\mathbf{y}^2+\mathbf{c}\mathbf{z}^2+2\mathbf{f}\mathbf{y}\mathbf{z}+2\mathbf{g}\mathbf{z}\mathbf{x}+2\mathbf{h}\mathbf{x}\mathbf{y}+2\mathbf{l}\mathbf{x}+2\mathbf{m}\mathbf{y}+2\mathbf{n}\mathbf{z}+\mathbf{d}$
に変わったとすれば、右の等式を証明せよ。

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{h} & \mathbf{g} & \mathbf{l} \\ \mathbf{h} & \mathbf{b} & \mathbf{f} & \mathbf{m} \\ \mathbf{g} & \mathbf{f} & \mathbf{c} & \mathbf{n} \\ \mathbf{l} & \mathbf{m} & \mathbf{n} & \mathbf{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & d \end{vmatrix}$$

＜189p＞　　問題２７、２８＜座標軸の回転＞

直交座標O－XYZの原点Oを固定し、軸の方向余弦が$(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$、$(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$、$(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$ になるように次の座標軸の回転

$$\begin{cases} x= \lambda_1\mathbf{x}+\lambda_2\mathbf{y}+\lambda_3\mathbf{z} \\ y= \mu_1\mathbf{x}+\mu_2\mathbf{y}+\mu_3\mathbf{z} \\ z= \nu_1\mathbf{x}+\nu_2\mathbf{y}+\nu_3\mathbf{z} \end{cases}$$

を行った場合、

$F = ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2lx+2my+2nz+d$　が
$\mathbf{F} = \mathbf{a}\mathbf{x}^2+\mathbf{b}\mathbf{y}^2+\mathbf{c}\mathbf{z}^2+2\mathbf{f}\mathbf{y}\mathbf{z}+2\mathbf{g}\mathbf{z}\mathbf{x}+2\mathbf{h}\mathbf{x}\mathbf{y}+2\mathbf{l}\mathbf{x}+2\mathbf{m}\mathbf{y}+2\mathbf{n}\mathbf{z}+\mathbf{d}$　になるとき、次を証明せよ。

(1)　$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=a+b+c$

(2)
$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{h} & \mathbf{g} \\ \mathbf{h} & \mathbf{b} & \mathbf{f} \\ \mathbf{g} & \mathbf{f} & \mathbf{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

(3)
$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{h} & \mathbf{g} & \mathbf{l} \\ \mathbf{h} & \mathbf{b} & \mathbf{f} & \mathbf{m} \\ \mathbf{g} & \mathbf{f} & \mathbf{c} & \mathbf{n} \\ \mathbf{l} & \mathbf{m} & \mathbf{n} & \mathbf{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 & 0 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 & 0 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & d \end{vmatrix}$$

＜191p＞　　問題４１＜一般の変換＞

平行移動により原点Oを点(x_0, y_0, z_0)へ移し軸の方向余弦が$(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$、$(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$、$(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$　になるように回転して、次の変換を行ったとき、

$$\begin{cases} x=x'+x_0 = \lambda_1\mathbf{x}+\lambda_2\mathbf{y}+\lambda_3\mathbf{z}+x_0 \\ y=y'+y_0 = \mu_1\mathbf{x}+\mu_2\mathbf{y}+\mu_3\mathbf{z}+y_0 \\ z=z'+z_0 = \nu_1\mathbf{x}+\nu_2\mathbf{y}+\nu_3\mathbf{z}+z_0 \end{cases}$$

$F = ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2lx+2my+2nz+d$　が
$\mathbf{F} = \mathbf{a}\mathbf{x}^2+\mathbf{b}\mathbf{y}^2+\mathbf{c}\mathbf{z}^2+2\mathbf{f}\mathbf{y}\mathbf{z}+2\mathbf{g}\mathbf{z}\mathbf{x}+2\mathbf{h}\mathbf{x}\mathbf{y}+2\mathbf{l}\mathbf{x}+2\mathbf{m}\mathbf{y}+2\mathbf{n}\mathbf{z}+\mathbf{d}$　になったとすると、次のことを証明せよ。

(1)　$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=a+b+c$

(2)
$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{h} & \mathbf{g} \\ \mathbf{h} & \mathbf{b} & \mathbf{f} \\ \mathbf{g} & \mathbf{f} & \mathbf{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

(3)
$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{h} & \mathbf{g} & \mathbf{l} \\ \mathbf{h} & \mathbf{b} & \mathbf{f} & \mathbf{m} \\ \mathbf{g} & \mathbf{f} & \mathbf{c} & \mathbf{n} \\ \mathbf{l} & \mathbf{m} & \mathbf{n} & \mathbf{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & d \end{vmatrix}$$

＜191p＞　　演習問題　５

一点Oに集まる直線 g_1、g_2、g_3 の方向余弦をそれぞれ　$(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$、$(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$、$(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$ とし、直線　g_2 と g_3、g_3 と g_1、g_1 と g_2　のなす角をそれぞれα、β、γとするとき、次を証明せよ。

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

＜288p＞　　補充問題　１

三面角O-ABCにおいて、$\angle BOC=a$、$\angle COA=b$、$\angle AOB=c$　で、OA、OB、OC を稜とする二面角をそれぞれA、B、Cとすれば、$\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$　であることを証明せよ。

補充問題　２

前問において
$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A$
$\cos b = \cos c\cos a + \sin c\sin a\cos B$
$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C$　であることを証明せよ。

「Ⅱ-7 から」

第９章　空間内の直線と平面

＜207p＞　　演習問題　８

ある平面上の三角形を他の平面上へ正射影して得られる三角形の面積は、もとの三角形の面積に、これら二平面間の角の余弦を乗じたものに等しい。このことを利用して、空間の三点 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$、$C(x_3,y_3,z_3)$の作る三角形ABCの面積Sは、次で与えられることを証明せよ。

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}$$

演習問題　9

空間の四点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$、$P_1(x_1,y_1,z_1)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$、$P_3(x_3,y_3,z_3)$　の作る四面体の体積 V は右の式で与えられることを証明せよ。

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{matrix}\right\|$$

演習問題　１０

二直線間のおのおのの上に線分 AB、CD をとれば、四面体の体積は、$\frac{1}{6}$AB・CD・h・sinθ で与えられることを証明せよ。ただし、h は二直線間の最短距離、θは角である。

「Ⅱ-8 から」

＜288、289p＞　補充問題　１、７

1　空間に四点A、B、C、D あり。もし、ABとCD、ACとBD が垂直ならば、ADとBC も垂直であることを証明せよ。

7　四面体ABCD において、もし、ABとCD、ACとBD が垂直ならば、頂点から対面に下した四垂線は一点に会することを証明せよ。

＜289p＞　補充問題　４

空間に四点A、B、C、D がある。AB、BC、CD、DA またはその延長が任意の平面と交わる点をそれぞれP、Q、R、S とするとき次式を証明せよ。　$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$

補充問題　８

四面体O-ABCで、OA=OB=OC=a 、∠BOC=α、∠COA=β、∠AOB=γ のとき四面体の体積Ｖは次式で与えられることを証明せよ。　$V=\frac{1}{6}a^3\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$

「Ⅱ-9 から」

第１０章　円

＜289p＞　補充問題　１

円周上の一点からその二つの接線に下した垂線の長さの積は、その接点を結ぶ弦に下した垂線の長さの自乗に等しい。

補充問題　２　（参考「Ⅱ-1」演習問題１０（九点円））

三角形の三辺の中点、頂点から対辺への三垂線の足、垂心と三頂点を結ぶ中点の九点は同一円周上にある。（九点円）

＜290p＞　補充問題　７

三円　s_1：$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$、
s_2：$x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$、
s_3：$x^2+y^2+2g_3x+2f_3y+c_3=0$
と直交する円の方程式は次で与えられる。

$$\begin{vmatrix} -(x^2+y^2) & x & y & -1 \\ c_1 & g_1 & f_1 & 1 \\ c_2 & g_2 & f_2 & 1 \\ c_3 & g_3 & f_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

「Ⅱ-10 から」

第１１章　２次曲線

＜238p＞　問題　３１

焦点を極、焦点から準線へ下した垂線を始線にとれば、放物線、楕円、双曲線の極座標系における方程式は、e を離心率として次の形に書かれる。　$r=\frac{l}{1-e\cos\theta}$

「Ⅱ-11 から」

＜256p＞　問題　５１

次の２次曲線に主軸変換を施せ。（標準形に直せ。）

(1)　$5x^2+2xy+5y^2-2x-10y-7=0$
(2)　$x^2-4xy-2y^2+10x+4y=0$
(3)　$x^2+4xy+3y^2-6x-10y+8=0$
(4)　$4x^2-4xy+y^2-10x-20y=0$

「Ⅱ-12 から」

＜256p＞　　演習問題　１、２

１　２次曲線の一つの焦点 F を通る任意の弦を P_1P_2 とすれば、 $\dfrac{1}{FP_1}+\dfrac{1}{FP_2}$ は一定である。

２　２次曲線の一つの焦点 F を通り互に直交する弦の長さを p_1、p_2 とすれば、 $\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}$ は一定である。

「Ⅱ-13 から」

＜290p＞　　　補充問題　２

直角双曲線上に三頂点を有する三角形の垂心はこの直角双曲線上にある。

補充問題　３　　（補助円：楕円の長軸を直径とする円）

楕円上の一点とその焦点を結ぶ線分を直径とする円は補助円に接する。

「Ⅱ-14 から」

第１２章　２次曲面

＜263p＞　　例　１

一直線上の三定点 A、B、C がそれぞれ yz、zx、xy 平面上にあるように動くとき、その直線上の第四の定点 P のえがく軌跡を、PA = a、PB = b、PC = c（符号も含めて）として求めよ。

＜264p＞　　問題　５

楕円面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ と平面 $lx+my+nz=1$ との交線を含み、原点を頂点とする２次錐面の方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=(lx+my+nz)^2$ である。

「Ⅱ-15 から」

＜269p＞　　問題　１１

２次錐面 $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta}-\dfrac{z^2}{\gamma}=0$ の、互に直交する二つの接平面の交線の軌跡は

$(\beta+\gamma)x^2+(\gamma+\alpha)y^2+(\alpha+\beta)z^2=0$ である。

「Ⅱ-19 から」

＜282p＞　　問題　２２　　　主軸変換を施せ。

(1)　$x^2+y^2-4yz-4zx+2xy-12x-16y+12z+35=0$

(2)　$x^2+2y^2+3z^2-4xy-4yz+2=0$

(3)　$x^2+z^2-2yz-4zx-2xy+2x+4y-10z+14=0$

＜282p＞　　演習問題　６　　　主軸変換を施せ。

(1)　$x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy=0$

(2)　$x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy+x+y+z=0$

「Ⅱ-20 から」

＜282p＞　　演習問題　４

２次の錐面 $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$ が互に直交する３本の母線を有するための条件は $a+b+c=0$ である。　（母線：直線の全てが曲面上にある直線）

＜291p＞　　補充問題　１

点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ を頂点として、球 $x^2+y^2+z^2=r^2$ をつつむ円錐の方程式は次で与えられる。

$(x_1^2+y_1^2+z_1^2-r^2)(x^2+y^2+z^2-r^2)=(x_1x+y_1y+z_1z-r^2)^2$ （ただし、$x_1^2+y_1^2+z_1^2-r^2 \geqq 0$ とする。）

補充問題　６（この本の最後の問題）

楕円面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ に対して、互に直交する三本の接線をひきうる点の軌跡は

$(b^2+c^2)x^2+(c^2+a^2)y^2+(a^2+b^2)z^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2$ である。

◎　目覚ましの問題の答え

ワラ半紙は半分に折ると相似で、縦、横が同じ比になる。

AB = x とおくと、x ： 2 = 1 ： x だから

x(AB) = $\sqrt{2}$

以下、三平方の定理を使い、

AE = 1、BE = $\sqrt{3}$、AD = 2、BG = $\sqrt{5}$、BD = $\sqrt{6}$