数学散歩　Ⅳ－７　　　　　　　　　　２０１６．　３．　β　　岐阜市　村山錞司

—　数学一般書のいろいろから　—

「みつけよう！数学！　Ｄ・ウェルズ（岩波書店）」（その６）

本の原書名など（表紙）から：

HIDDEN CONNECTIONS,DOUBLE MEANINGS　A mathematical exploration by David Wells

（日本語の書名「みつけよう！数学！」と比べて如何ですか？（英語に弱い私には？？？））

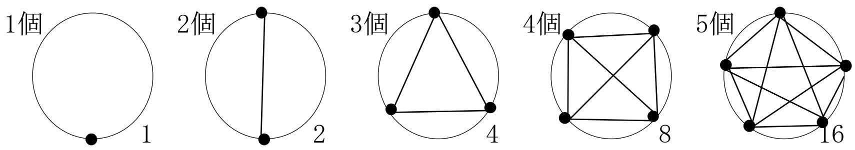
ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問　題　など＞

１５章　符合する問題　１６章　代数遊び　　　いずれも特記事項なし。

１７章　類型認識と錯覚　　文中から「レオ・モーゼルの問題」

１つの円は円周上の点を結ぶ直線によっていくつの部分に分けられるか？



では

6個では 32 ？

n 個では $f(n)=\dfrac{1}{24}(n^4-6n^3+23n^2-18n+24)$

⑴　６個の場合 f(6) を計算し、図でも確認してください。

⑵　f(n) の式を分析して、証明を考えてみてください。

いろいろ楽しめる話題（問題）です。

章末問題から

2　　1/49 = 0.0204081632…　数字を２桁ずつで区切ると２の累乗の初めの方が現れている。
このパターンは本当か。それとも錯覚、単なる偶然の一致か？

何か不思議ですが？

4（（解答を参考に）改題）
「２と３以外のすべての素数は６の倍数より１大きいか１小さい」を証明せよ。

確認したくなりました。

１８章　はっきりと証明して確信をもつ（最終章）

感想として：正直いって腹が立った。確信がもてるような証明はここまでどこにも見当たらなかった。読者に「やってみろ！！｝ということだろう。最終章だから何か期待できそうです。

文中から　「無限級数の問題」

(A)　$1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{8}+\cdots$

(B)　$1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{7}-\cdots$

（本文より）２００年前、上の級数は混乱をひき起こしていました。・・・違いといえば、わずかにその順序が異なっているだけです。しかし、この違いが大変重要なのです。・・・

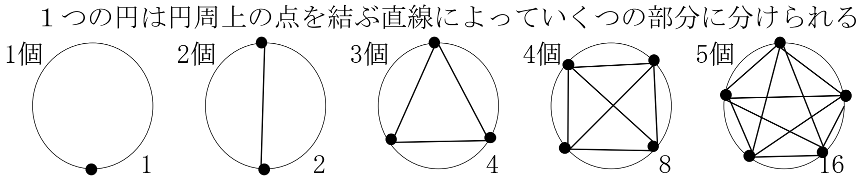
(A)、(B) を求めてください。

何故か学生時代を思い出しました。

＜考察など＞

１７章　類型認識と錯覚　　文中から「レオ・モーゼルの問題」

１つの円は円周上の点を結ぶ直線によっていくつの部分に分けられるか？



では

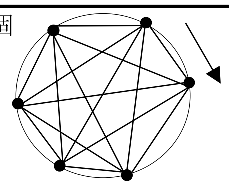
6個では 32 ？

n 個では $f(n)=\dfrac{1}{24}(n^4-6n^3+23n^2-18n+24)$

⑴　６個の場合 f(6) を計算し、図でも確認してください。

⑵　f(n) の式を分析して、証明を考えてみてください。

（答、証明）⑴　$f(6) = 31$　　周辺から数えて、 $6 + 3\times6 + 6 + 1 = 31$　　6個



⑵　$n(n-1)(n-2)(n-3) = n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n$ 、$4! = 24$

$n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24 = n(n-1)(n-2)(n-3) + 12n^2 - 12n + 24$

$= n(n-1)(n-2)(n-3) + 12n(n-1) + 24$　だから

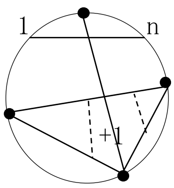
$f(n) = {}_nC_4 + {}_nC_2 + 1$　　　（直接、この式で証明を考えたができず？？？）

＜数学的帰納法で対応＞　　${}_{n+1}C_r = {}_nC_r + {}_nC_{r-1}$ を利用

$f(1) = 1$ 、$f(n+1) = {}_{n+1}C_4 + {}_{n+1}C_2 + 1 \quad = {}_nC_4 + {}_nC_3 + {}_nC_2 + {}_nC_1 + 1 \quad = f(n) + {}_nC_3 + n$

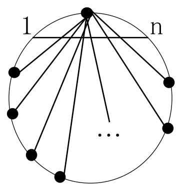
よって、　$f(n+1) = f(n) + {}_nC_3 + n$ を示せばよい。

増加分について、



三角形１か所につき１区分増加

$+ {}_nC_3$



追加した n+1 番目の頂点と直近の辺とでn区分増加

$+ n$

章末問題から

２　　1/49 = 0.0204081632…　数字を２桁ずつで区切ると２の累乗の初めの方が現れている。

（答）　$0.0204081632\cdots = \dfrac{2}{100} + \left(\dfrac{2}{100}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{100}\right)^3 + \left(\dfrac{2}{100}\right)^4 + \cdots$

$= \dfrac{2/100}{1-2/100} = \dfrac{1}{49}$　で当たり前　（0.02040816326530612２…）

４（（解答を参考に）改題）

「２と３以外のすべての素数は６の倍数より１大きいか１小さい」を証明せよ。

（証明）　２だけ大きいか小さい数は偶数で、３だけ大きいか小さい数は３の倍数であるから。

１８章　はっきりと証明して確信をもつ　　文中から　「無限級数の問題」

(A)　$1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{8} + \cdots$

(B)　$1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{7} - \cdots$

(A)、(B) を求めてください。

（解答（概略））（細かい吟味などは省略）

(A)（解１）　$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^3 + \cdots$　　0 から x まで積分して

$\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots$、$x = 1$ として

$1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots \quad = \log 2$

（解２）　$S_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n}$

$= \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{2n} - \log 2n\right)$

$- 2 \times \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \log n\right) + \log 2$

$\to C - C + \log 2 = \log 2$

(B)（解１）　（与式）$= \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6}\right) - \dfrac{1}{8} + \cdots$

$= \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots\right) \quad \to \quad \dfrac{1}{2}\log 2$

（解２）　$S_n = 1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{4n-2} - \dfrac{1}{4n}$

$= \underline{\left(1 + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1}\right)} - \underline{\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right)}$

$= \underline{\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right) - \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)}$

$- \underline{\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right)}$

$= \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} - \log 2n\right) - \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \log n\right)$

$+ \dfrac{1}{2}\log 2 \quad \to \quad \dfrac{C}{2} - \dfrac{C}{2} + \dfrac{1}{2}\log 2 \quad \to \quad \dfrac{1}{2}\log 2$