数学散歩　Ⅳ－16　　　　　　　　　２０１６．８．α　　岐阜市　村山錞司

―　数学一般書のいろいろから　―

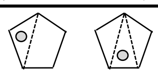
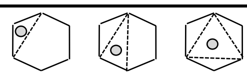
「基礎数学トレーニングーＮの数学プロジェクト 根上生也＋中本敦浩（日本評論社）」（その５）

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題など＞

「だいたいわかりの数学－Ｎの数学⑨」

問題１（安易な予想）正ｎ角形の頂点を３つ選んで作れる三角形の（形の異なる）個数は合同なものを除くと、ｎ－３（通り）になりそうだ。この予想は正しいか？

正四角形は１個  正五角形は２個  正６角形は３個  ・・・

問題２（だいたいわかりの対数）　$\log_{10}500$ はおよそいくつか？

だいたいで結構です。

問題３　ｎチームがトーナメントで試合をする。トーナメントの図は何段になるか？

試合の数は、最後まで勝ち残るのが１チームで、負けるチームの数と同じだからｎ－１になる。

（なぜか問題４が見当たらない？）

問題５　x、y、z ≧ 0 のとき、3x + 2y + z ≧ 12 ならば、x + y + z ≧ 4 を示せ。

お得意の不等式の証明問題ですが？

「証明するということ－Ｎの数学⑩」

＜この最終章で本論に入るような感じがします。＞

《オア（Ore）の定理》グラフＧにおいて、隣接していない任意の２頂点ｕ、ｖ∈Ｖ（Ｇ）に対して、

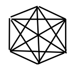
（★）　deg u + deg v ≧ |Ｖ（Ｇ）|　　が成り立てば、Ｇはハミルトン閉路を持つ。

＜この本による「グラフ理論」から＞下線、（　）内の記述は私個人の解釈、判断によるものです。

グラフ：　点と線で描かれた図形のことで、点を頂点、線を辺と呼ぶ。

辺：　２つの頂点を選ぶと辺が１本決まる。（２頂点は隣接しているという。）

完全グラフ：ｎ個の頂点とそのすべての組み合わせを線(辺)で結んで得られる図形。



サイクル：（閉路のことで、辺を１つながりでつないでできた閉じた道）　　n = 6 の場合

マッチング：２頂点を結ぶ辺の集合　（道：辺のつながり）

完全マッチング：余すことなく、すべての頂点をペアに（２つずつ組にして辺で結んで）できたときのマッチング

二部グラフ：同じ色の頂点どうしは辺で結ばれていないように、頂点全体を白と黒で色分けできるグラフ。白と黒の頂点の個数が等しくないと、二部グラフには完全マッチングは存在しない。白頂点の集合と黒頂点の集合をそれぞれ部集合という。

ハミルトン閉路：<u>すべての頂点をちょうど１回ずつ通り</u>出発点に戻ってくるサイクルで、通らない辺があってもよい。

ハミルトン道：水平に左から右に伸びる道で、<u>すべての頂点を含んでいる道</u>(辺をつないだのが道)

（参考）オイラー回路：グラフの<u>すべての辺をちょうど１回ずつ通って</u>最初の頂点に戻る経路(道)。

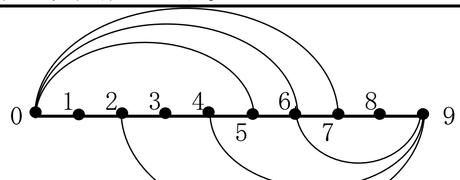
Ｖ(Ｇ)：　（グラフＧの頂点全体の集合）

|Ｖ(Ｇ)|：　Ｇの頂点数を表す記号(｜｜は集合の濃度（元の個数))

deg u：　頂点ｕと辺で結ばれている頂点の個数で、次数という。

問題２（鳩サブレ論法）

図のグラフのハミルトン閉路を見つけよ。



図が鎌倉名物の「鳩サブレー（クッキーのようなもの）」に似ているからだそうだ。

＜考察など＞

「だいたいわかりの数学－Ｎの数学⑨」

＜問題１について＞正三角形についての記述はなく、ｎ－３＝０ になるが？

考察などは後に回します。

問題２（だいたいわかりの対数）　$\log_{10}500$ はおよそいくつか？

（答）（本より「$\log_a x$ とは x が a で何回割れるかである。」）

500 = 10×10×5 だから、10 で２回割れ、$\log_{10}500$ = 2.・・・ で、2 と 3 の間。

問題３　　ｎチームがトーナメントで試合をする。トーナメントの図は何段になるか？

（答）１段ごとに半分（1/2）になるから、ｎを２で何回割れるかになり、およそ $\log_2 n$

問題５　　x、y、z ≧ 0 のとき、3x + 2y + z ≧ 12 ならば、x + y + z ≧ 4 を示せ。

（解１）　x ≧ 4 − 2y/3 − z/3　　∴ x + y + z ≧ 4 + y/3 + 2z/3 ≧ 4

（解２）（本の解答から）　3(x + y + z) ≧ 3x + 2y + z ≧ 12 ∴ x + y + z ≧ 4

（この問題の出題の意図がいま１つ分からなかった？）

問題１　正ｎ角形の頂点を３つ選んで作れる三角形の（形の異なる）個数は合同なものを除くと、ｎ－３（通り）になりそうだ。この予想は正しいか？

（自分なりに整理してみた）　　正ｎ角形の外接円の

１辺に対する中心角は 2π/n、円周角は π/n 、正ｎ角形の三頂点を A、B、C 、△ABC として、

弧BC、弧CA、弧AB における正ｎ角形の辺の数をα、β、γとすれば、

（απ/n) +（βπ/n) +（γπ/n) = π　　∴　　α + β + γ = n（α、β、γは正の整数)

（以下、本より）（正方形は）　4 = 1 + 1 + 2（ 1 通り ）、以下、

5 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2（ 2 通り ）、6 = 1 + 1 + 4 = 1 + 2 + 3 = 2 + 2 + 2（ 3 通り ）、

7 = 1 + 1 + 5 = 1 + 2 + 4 = 1 + 3 + 3 = 2 + 2 + 3（ 4 通り ）、

8 = 1 + 1 + 6 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4 = 2 + 2 + 4 = 2 + 3 + 3（ 5 通り ）

n = 9（正九角形）については、

9 = 1 + 1 + 7 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 3 + 5 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3

で、7 通り。　　9 − 3 ≠ 7 で予想は成り立たない。

（本文より）・・・「だいたいわかりの数学」の奥義によって、あっさりと答を出して・・・

「残念ですが、その式は合っていませんよ」　「え！なんで？」　「だって」

（「だって」の続き　本文の要約）

１．　正ｎ角形のｎ個の頂点から３個選んで三角形を作る。${}_nC_3$ 通り。

２．　回転して合同 1/n 、裏返して合同 1/2 で　1/2n になり、

３．　三角形が対称だと、回転、裏返しても同じになり 1/2n は割り過ぎで、

${}_nC_3$/2n より大きな値になる。オーダーも２次式以上になり、n − 3 は絶対正しくない。

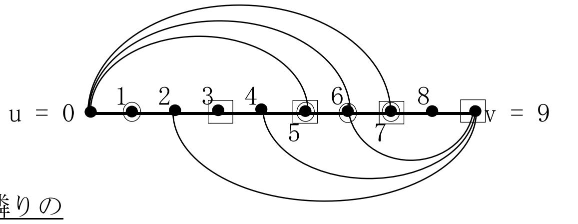
＜本当の答は？＞（本文より）

この問題は整数の分割問題と関連していて、本当の答えを書き下すことは不可能なのです。

「証明するということ－Ｎの数学⑩」

＜オアの定理の証明は、次回に回します。＞

問題２（鳩サブレ論法）
図のグラフのハミルトン閉路を見つけよ。



（答）（本の要約）

１．　頂点 u = 0 と辺で結ばれている

頂点（1,5,6,7）に○をつける。

２．　頂点 v = 9 と辺で結ばれている頂点の<u>右隣りの</u>

頂点（3,5,7,9）に□をつける。　（参考）01、12、34、・・・、89　も辺

３．　○と□が重なっているところが２か所(5、7）あり、u から水平にどちらかの直前まで進む。

４．　下向きの円弧を通り v へ行き、そして左に水平に戻って先ほどの頂点の上向きの円弧を通り、u に戻る。

問題２の鳩サブレーの２つのハミルトン閉路：　①　01234 − 98765 − 0、②　0123456-987-0

＜オアの定理の　（★）　deg u + deg v≧ |Ｖ(Ｇ)| について＞

deg u = 4、deg v = 4、|Ｖ(Ｇ)| = 10　だから、　4 + 4 = 8 ＜ 10 で（★）は不成立。

◎　定理の　（★）deg u + deg v≧ |Ｖ(Ｇ)| はハミルトン閉路があるための<u>十分条件</u>である。

（（★）を満たせばハミルトン閉路があるということで、逆は必ずしもいえない。）

（追加の問題）問題２と同様の図で、deg u + deg v ≧ 10 で、ハミルトン閉路が１つしかない例を作れ。　（（１例として）012-9876543-0 どんな図になりますか？）（答は次の報告で）

＜参考（本文より）＞　「（鳩の）巣」の役割をするのは、頂点ｕを除いた残りの頂点で、ｎ－１個しかなく、「鳩」の役割をするのは、○：deg u、□：deg v で合わせてｎ以上であれば

１頂点以上の頂点で重なる。

「鳩サブレ論法」を適用して、

定理　グラフＧにおいて、２つの頂点ｕとｖを結ぶ<u>ハミルトン道</u>があり、|Ｖ(Ｇ)|= n で、
deg u + deg v≧ n　　を満たせばＧはハミルトン閉路を持つ。