数学散歩　Ⅳ－１７　　　　　　　　　２０１６．８．β　　岐阜市　村山錞司

―　数学一般書のいろいろから　―

「基礎数学トレーニング－Ｎの数学プロジェクト 根上生也＋中本敦浩（日本評論社）」（その６）
ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。　　　　　　　　（最終）

＜問題など＞

＜この本にあった、その他の気になる２つの問題＞

問題Ａ　半径Ｒの円に内接する正 2n+1 角形の 2n+1 個の頂点による完全グラフ（頂点のすべての組合せを線で結んだ図形）の穴（内部にできる多角形）に内接する円の半径を求めよ。

正 2n 角形のときは、円の中心で線が交わり穴がない。

問題Ｂ　立方体の展開図は、合同なものや裏返して重なるものを除くと、全部で１１個（通り）ある。それらをすべて列挙せよ。

頭の体操になり楽しめます。

「証明するということ－Ｎの数学⑩」

「オアの定理」に戻って、

《オア（0re）の定理》グラフＧにおいて、隣接していない任意の２頂点ｕ、ｖ∈Ｖ（Ｇ）に対して、
（★）　deg　u　+ deg　v ≧ │Ｖ(Ｇ)│　　が成り立てば、Ｇはハミルトン閉路を持つ。

本では、証明①（背理法による証明）、証明②（帰納法による証明）、証明③（構成的な証明）の３通りの証明を示しているが、ここでは証明①についてのみ紹介する。

（本の証明から、下線と（　）内は私の追加したコメント）

証明①（背理法による証明）定理の条件を満たすが、ハミルトン閉路を持たないｎ頂点のグラフの中で（本当はそんなグラフは存在しないが）、辺の数が最大のものをＧとする。完全グラフは明らかにハミルトン閉路を持つ（ｎ頂点の任意の順列（例 1234・・・n1)でよい）ので、Ｇは完全グラフではない。したがって、Ｇは隣接しない２頂点ｕ、ｖをもつ。

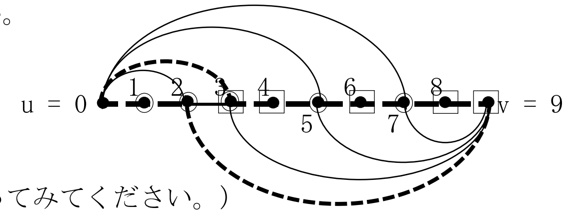
そこで、Ｇにｕとｖを結ぶ辺ｕｖを追加して得られるグラフをＧ’とする。Ｇ’における頂点の次数は大きくなることはあっても、小さくなることはない（deg　u、deg　v　は 1増　、他は 0)ので、Ｇ’も定理の条件を満たしている。また、Ｇは最大反例なので、Ｇよりも辺の多い（+1) Ｇ’はハミルトン閉路を持ち、そのハミルトン閉路は辺ｕｖを通る。なぜなら、そうでないと、そのハミルトン閉路がそのままＧのハミルトン閉路になってしまうからである。

そのハミルトン閉路から辺ｕｖを除去したものは、Ｇにおいてｕとｖを結ぶハミルトン道(すべての頂点を通る)になっている。ここでｕとｖは不等式(★)を満たすので、「鳩サブレ論法」により、(追加した定理によって）Ｇのハミルトン閉路が存在する。これはＧが定理の反例であることに矛盾する。したが って、定理には反例はない。

（以上、原文のまま）

＜前回の問題の答＞

（追加の問題）　deg　u　+ deg　v　≧　10　で、ハミルトン閉路が１つしかない例を作れ。



（（１例として）012-9876543-0 右図をたどってみてください。）

「禁則事項」

禁則「だめだめ１５項目」

①　定義を曖昧にしたまま、議論を進めてしまう。
②　前提と結論の区別がはっきりしていない。
③　不自然な日本語が気にならない。
④　指示代名詞ばかりを使って、具体的な言葉で状況を説明しようとしない。
⑤　推論の理由を口にしない。
⑥　次々と前のことを忘れてしまう。
⑦　あやふやな知識を使ってしまう。
⑧　何にでも解決する方法が用意されていると思っている。
⑨　１つの例で「すべて」と思ってしまう。
⑩　変化させるところと変化させないところの区別をしない。
⑪　記号の使い方が不適切である。
⑫　漫然と悩むだけで、具体的に状況を絵で表そうとしない。

⑬　　「対称性」など、都合のよい構造を仮定してしまう。
⑭　　当面の場合分けを完結させる前に、個々の場合を考えてしまう。
⑮　　場合分けなど、自分の認知過程を説明できない。

（感想として）　反省させられる部分もあり、参考になるが、この本の中においても禁則事項に抵触しそうな箇所も多く見られ、難しいことだと考えさせられた。

「Ｎの数学プロジェクト」（本文から目についた部分を記述）

◎　　全体を振り返って－基礎数学力・・・その原理や構造の例として紹介
- １対１対応の考え方
- 鳩の巣原理
- 平均の考え方
- 偶奇性・・・「偶数なら２で割り切れて、２つずつ組にできる」という原理

◎　　学校数学改造プロジェクト

疑問１　　数学は論理的思考を養うと言われているが、本当にそうだろうか？
疑問２　　数学では自分で考えることが重要だとよくいうが、そういう場面が提供されているだろうか？

（本の提言から）学校数学を２つのフェーズに分解するという計画

第１フェーズ
　基礎数学力だけをはっきできるような問題設定をする。普通の数学で学ぶ技能や形式を繰り出すまでもなく発見でき、表現できる現象を扱う。（エンジョイ・マス）

第２フェーズ
　従来の数学が得意とする技能修得に支えられて行う数学。論証指導も入る。

（本には、具体的な提言もある。）

＜読後の感想として＞この報告をまとめるにあたり、本を何度も読み直し、考え直し、味わうことができた。これからの時代には、この本の題材になっている「離散数学」の分野も中学、高校の数学教育にもっと採り入れられてもと思う。現役の先生方にも一読を勧めたい本である。

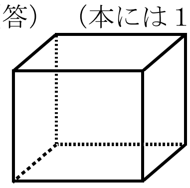
＜考察など＞

問題Ａ　　半径Ｒの円に内接する正 2n+1 角形の 2n+1 個の頂点による完全グラフ（頂点のすべての組合せを線で結んだ図形）の穴（内部にできる多角形）に内接する円の半径を求めよ。

（答のみ示す）　穴の直径 $= 2R\cos\dfrac{2n}{2n+1}\pi$

問題Ｂ　　立方体の展開図は、合同なものや裏返して重なるものを除くと、全部で１１個（通り）ある。それらをすべて列挙せよ。

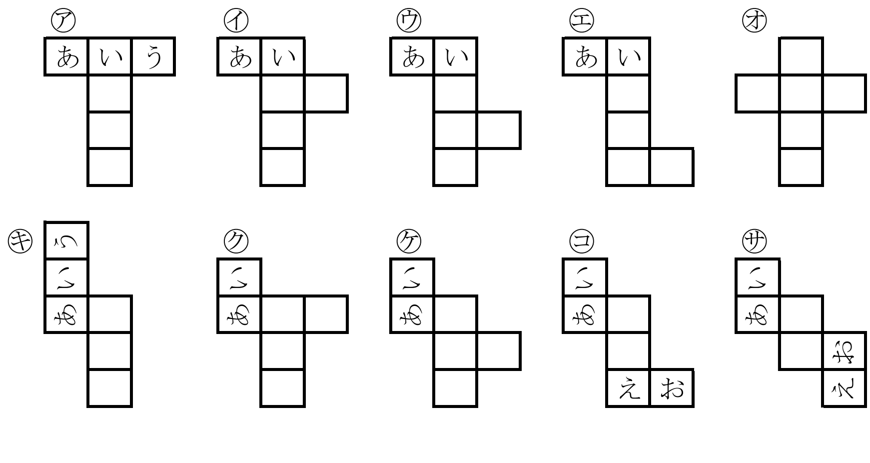
（答）（本には１１個の例（下図と順序が異なる）が示してあるが、解説はない。）



立方体は６面とも正方形で、展開図では、
(A)　どの正方形も少なくとも１辺は他の正方形と１辺を共有する。
(B)　４個の正方形が田の字形に並ぶことはない。
(C)　１列に並ぶ正方形の最多の数は、４個か３個か２個に限られる。

並ぶ列の配置について、

１．	最多列が４個のとき	１個－４個－１個	下図の　㋐～㋕
２．	最多列が３個のとき	３個－３個または２個－３個－１個	下図の　㋖～㋙
３．	最多列が２個のとき	２個－２個－２個	下図の　㋙



（「あいうえお」は目印として付けた。）

「１対１対応を考えよう－Ｎの数学③」展開図を数える・・・から

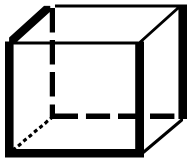
この「Ｎの数学③」はパスしてきましたが、問題Ｂはその中の問題です。立方体を扱ったので、ついでに双対である正八面体についての問題を追加しました。

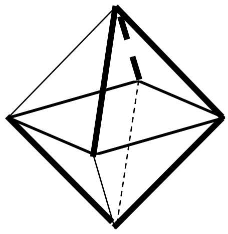
追加の問題Ｃ　正八面体の展開図は、合同なものを除くと（本では、全部でいくつあるか？）、 立方体と同じで全部で１１個ある。それらをすべて列挙せよ。

（以下、本文の概要など紹介）

＜立方体と正八面体は互いに双対になっている＞

立方体の各面の中心を頂点とする正八面体があり、その正八面体の各面の中心を頂点とする立方体がある。大きさを無視すれば、同じ方法で一方から他方を構成できる。





＜立方体の展開図から正八面体の展開図を作る＞

立方体の各辺と正八面体の各辺が１本ずつ組になって、互いに中点で直交しているように配置する。（重ねた図は省略。右上図を想像で重ねてください。）

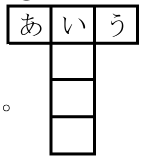
㋐を例にして説明

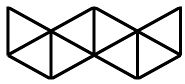
１．　立方体の図（上の左図）に展開するときに切る辺に太線を引く。

２．　１．の太線でない辺に対応する正八面体の辺に太線を引く（上の右図）。

３．　２．の太線で切れば右下の展開図が得られる。

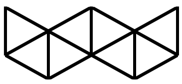
㋐



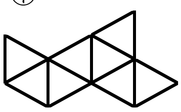


次の㋐～㋚が問題Ｂの答の㋐～㋚に対応する正八面体の展開図です。できれば、点検、追試をお願いします。

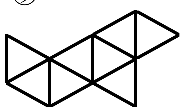
㋐



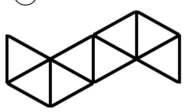
㋑



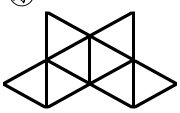
㋒



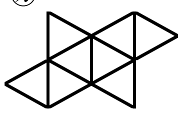
㋓



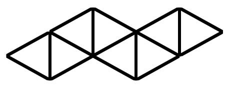
㋔



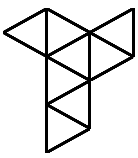
㋕



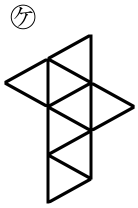
㋖



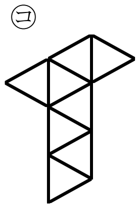
㋗



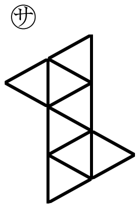
㋘



㋙



㋚



(本文から)

・・逆に、正八面体の展開図から始めて、同じことを実行すると、やはり立方体の展開図が得られるのでした。

「どうしてそうなるの？」

たしかに不思議な現象です。・・・これは数学的に証明できる事実ですが、今日のところはこの事実の発見に感動するにとどめておきましょう。・・・

(「ずるい」という読者の声が聞こえる・・・。)

・・・、立方体の展開図と正八面体の展開図の間に１対１対応が作れたことになります。だから、両者の展開図の個数は等しい！

(私の感想)

証明の方法など気になります。方針などヒントでもあればと願うところです。

正直、正八面体の展開図に頭が狂いそうになり、本当に暇潰し(?)になりました。