数学散歩　Ⅳ-11　　　　　　　　　　２０１６．５．β　　岐阜市　村山錞司

―　数学一般書のいろいろから　―

「マンホールのふたはなぜ丸い？暮らしの中の数学 中村義作（日本経済新聞社）」（その３）

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題など＞

「お見合い－『もっといい相手』を求め、何人見送るか」

（前提として）

①　お見合いする相手を、好ましさの順にA、B、C、D、　・・・とする。

②　一番、好ましい A と結婚する確率を最大にしたい。

③　お見合いの順番はでたらめ（ランダム）で何番目が A か、お見合いするまで分からない。

＜お見合い回数と相手の相関＞

N：お見合いできる回数（相手の人数）

K：黙って見送る（無条件に断る）回数で、その後はそれまでのどの相手よりも好ましければ結婚し、最後になったらその相手と結婚する。

P：k 回見送って A と結婚できる確率（K は P を最大にする回数）

（本の表から）

N	K	P
4	**1**	**0.458**
5	2	0.433
6	2	0.428
7	3	0.414
8	3	0.410

（以下略）

＜例として＞

N = 4 の場合、A、B、C、D について 4！= 24 通りの可能性をすべて並べて調べればよい。

ABCD ABDC ACBD ACDB ADBC ADCB　　BACD BADC BCAD BCDA BDAC BDCA

CABD CADB CBAD CBDA CDAB CDBA　　DABC DACB DBAC DBCA DCAB DCBA

上の順列から、１回目の相手と結婚するとすると、A、B、C、D ともに確率は 1/4。

１回目を見送るとすると、A と結婚する確率は **11/24(= 0.458)**

２回目も見送るとすると、10/24(= 5/12)、

だから最も好ましい A と結婚するための対策は、１回目を見送ることである。

問（表に絡んで）⑴ N = 5、K = 1、2、3 について確率 P を求めよ。

⑵ N = 8、K = 3、P = 0.410 を確認せよ。

４人ならまだしも８人ともなると（8！= 40320 通り）とても並べられません。

「２０人でジャンケンすると－勝負がつくまで千回はジャンケン・ポン」

＜本の表の一部分から＞

ｎ：ジャンケンする人数

Ｐ：ジャンケン１回で勝負がつく確率

Ｎ：ジャンケンが終わるまでの平均回数

n	P	N
2	0.6667	1.500
3	0.6667	1.500
10	0.0519	19.259
20	0.0009	**1108.421**

問１　n 人でジャンケンをして１回で勝負がつく（勝ち、負けの２つのグループに分かれる）確率 P を求めよ。

問２　n 人でジャンケンをして勝負がつくまでの平均回数は、問１の確率を P として 1/P であることを示せ。

問３　n = 20（人）のとき、P、N を電卓（８桁）で計算し、表の数値と照合せよ。

＜考察など＞

「お見合い－『もっといい相手』を求め、何人見送るか」

問 ⑴ N = 5、K = 1、2、3 について確率 P を求めよ。

⑵ N = 8、K = 3、P = 0.410 を確認せよ。

（答） 数え間違いがあるかもしれません。

⑴ 比較のため分数のままで約分せず。（52/120 = 13/30 ≒ 0.433）

K	A	B	C	D	E
1	50/120	32/120	20/120	12/120	6/120
2	52/120	28/120	16/120	12/120	12/120
3	42/120	24/120	18/120	18/120	18/120

⑵ ＜例として、N = 8、K = 3 について調べる。＞

好ましい順に、A、B、C、D、E、F、G、H とし、順番はランダムに、３回まで見送るとする。

(A)　３回までに A が入る場合、他は A よりすべて下位だから結婚は最後の相手◇

<u>○A○</u>｜△△△△◇

◇：B、C、D、E、F、G、H についてそれぞれ　${}_6C_2$×３！×４！= 2160 通り

(B)　３回までに B が入り A は４回以降になる場合、順に関係なく A が結婚の相手

○B○｜△A△△△　A：　${}_6C_2$×３！×５！ = 10800 通り

(C)　３回までに C が入り A、B は４回以降になる場合、A、B の早い方が結婚の相手

○C○｜△B△A△　A、B：　${}_5C_2$×３！×５！÷２ = 3600 通り

(D)　３回までに D が入り A、B、C は４回以降になる場合、A、B、C の早い方

○D○｜C△B△A　A、B、C：　${}_4C_2$×３！×５！÷３ = 1440 通り

(E)　３回までに E が入り A、B、C、D は４回以降になる場合、A、B、C、D の早い方

○E○｜CB△AD　A、B、C、D：　${}_3C_2$×３！×５！÷４ = 540 通り

(F)　３回までに F、G、H が入る場合、A、B、C、D、E の早い方

HFG｜CBEAD　A、B、C、D、E：　３！×５！÷５ = 144 通り

合わせて、　A：16524 通り、 B：7884 通り、　C：4284 通り、　D：2844 通り、
E：　2304 通り、 F：2160 通り、　G：2160 通り、　H：2160 通り

K = 2、4 の結果もあわせて確率 P を小数で示す。

K	A	B	C	D	E	F	G	H
2	0.398	0.220	0.130	0.083	0.056	0.042	0/036	0.036
3	<u>**0.410**</u>	0.200	0.106	0.071	0.057	0.054	0.054	0.054
4	0.380	0.165	0.094	0.075	0.071	0.071	0.071	0.071

例を参考に、K = 2、4 についても調べてみてください。

「２０人でジャンケンすると－勝負がつくまで千回はジャンケン・ポン」

問１　n 人でジャンケンをして１回で勝負がつく（勝ち、負けの２つのグループに分かれる）確率 P を求めよ。

（答）⑴ n 人(A_1、A_2、A_3、・・・、A_n) を２つのグループに分ける分け方は、

A_2、A_3、・・・、A_n が A_1 と同じグループに入るかどうかで 2^{n-1} 通り、

すべて A_1 と同じグループになるのを除いて、$2^{n-1}-1$ 通り。

⑵ n 人のジャンケンの出し方は 3^n 通り。

⑶ A_1 のグループの出し方は 3 通り、 A_1 以外のグループの出し方は 2 通り。

よって求める確率は　$P = \dfrac{(2^{n-1}-1)\cdot 3\cdot 2}{3^n} = \dfrac{2^n-2}{3^{n-1}}$

問２　n 人でジャンケンをして勝負がつくまでの平均回数は、問１の確率を P として 1/P であることを示せ。

（証明）　勝負のつかない確率は 1-P 、　ちょうど n 回で勝負がつく確率は $(1-P)^{n-1}\cdot P$

平均回数を S とすると、

$$S = 1\cdot P + 2\cdot(1-P)\cdot P + 3\cdot(1-P)^2\cdot P + \cdots + n\cdot(1-P)^{n-1}\cdot P + \cdots$$

$$-)\ (1-P)\cdot S = (1-P)\cdot P + 2\cdot(1-P)^2\cdot P + \cdots + (n-1)\cdot(1-P)^{n-1}\cdot P + \cdots$$

$$PS = P + (1-P)\cdot P + (1-P)^2\cdot P + \cdots + (1-P)^{n-1}\cdot P + \cdots$$

$$= \frac{P}{1-(1-P)} = 1$$　だから、

$$S = \frac{1}{P} = \frac{3^{n-1}}{2^n-2}$$

問３　n = 20（人）のとき、P、N を電卓（８桁）で計算し、表の数値と照合せよ。

（答）　$S = \dfrac{1}{P} = \dfrac{3^{19}}{2^{20}-2} = \dfrac{3^4\cdot 3^{15}}{1024^2-2} = 81 \times \dfrac{14348907}{1048574}$

$= 81\cdot 13.68421 \fallingdotseq$ <u>1108.421</u>