数学散歩　Ⅳ‐１２　　　　　　　　２０１６．６．α　　岐阜市　村山錞司

―　数学一般書のいろいろから　―

「基礎数学トレーニングーＮの数学プロジェクト 根上生也＋中本敦浩（日本評論社）」（その１）
（巻末の著者紹介文から）二人とも日本における位相幾何学的グラフ理論を代表する研究者。・・・
（私の感想など）馴染みのうすいグラフ理論など離散数学の分野の問題がいろいろで、高校の元数学教師として参考になり、得るところが多かった。一読を勧めたい本である。

一般の方でも頭のトレーニングになる問題もあり、いくつか選んで紹介する。

なお、問題番号など、できるだけ本と同じにしたが、問題文は題意を変えない範囲で修正した。

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題など＞

「見てそれとわかるーＮの数学①」

問題１　　辺の長さが同じとき、どの正多面体が一番大きいか。

昔、実際に厚紙を切って５種類の立体を作ったこともあります。

（本文から）・・そして、「正十二面体」には聴衆の１割から２割が、・・最後の「正二十面体」には半分以上、場合によってはほとんどの人が手を挙げます。

問題２　　$(11111)^2$ はいくつか？

問題３　　$(111111111)^2$ はいくつか？（(　) の中の 1 は９個)

電卓で計算できますか？

「鳩の巣原理を使おうーＮの数学④」

問題３　　1 から 1000 までの自然数の中から、どの２数についても他で割り切れないように、500 個の数を選べ。また、501 個でも、そういう選び方は可能か？

この本を購入したのは、この問題を見たからだと思います。1、2、3、…とやっていくと？

ところで「鳩の巣」とは何でしょう？

問題４　1 から 2N（ただし、N≧1）　までの自然数の中から、どの２数についても互いに他で割り切れないように、N 個の数を選べ。また、N+1 個ではそういう選び方が不可能であることを示せ。

問題３の一般化で、2 が関係しそうです。

問題５　相異なる７個の整数をどのように選んでも、その和か差が１０の倍数になる２数が含まれることを示せ。

「鳩の巣原理」で１個余るから６（ = 7-1 ）個の箱？

（本の内容の紹介（概要））

問題づくり、完成までのステップ　として、

①　巣を用意する　　②　鳩を用意する　　③　巣に入るルールを決める

④　全体の定式化　　⑤　思考実験　　　　⑥　全体の調整

の解説がいろいろあって、次の問題を提示

問題６　　１から５０までの自然数５０個からなるどんな数列も、少なくとも８個の数からなる増加列または減少列を含むことを示せ。

8-1 = 7 で 7×7+ 1 = 50。7×7 の巣箱（下駄箱）を用意。

＜考察など＞

「見てそれとわかるーＮの数学①」

問題１　　辺の長さが同じとき、どの正多面体が一番大きいか。

（答）正多面体は、正四面体、立方体、正八面体、正十二面体、正二十面体の五種類で、そのうち一番大きいのは一つの面が一番大きい正五角形である正十二面体である。それぞれ五種類の立体の展開図を描いてみるのも一興です。正十二面体が予想以上にどでかいことが分かります。
（英語で、the dodecahedron というそうです。（本より））

問題２　　$(11111)^2$ はいくつか？

問題３　　$(111111111)^2$ はいくつか？（(　) の中の 1 は９個)

（答）問題２ 123454321 問題３ 12345678987654321 （頭の中で)計算を筆算でやってみてください。
（本文から）・・・それは珠算10段の学生でした。彼に問題３を出題すると、それこそ瞬時に、きちんと位までつけて答えてくれたのです。「一京二千三百四十五兆六千七百八十九億八千七百六十五万四千三百二十一」　どうしてそういう答えになるかと彼に聞いてみると、彼は「やればそうなるんです」とだけ答えました。・・・

「鳩の巣原理を使おう－Ｎの数学④」

問題３　　1 から 1000 までの自然数の中から、どの２数についても互いに他で割り切れないように、500 個の数を選べ。また、501 個でも、そういう選び方は可能か？

（答）（前半）（1×、2×、3×、・・と調べていくと）501、502、503、・・、1000 の 500 個

（後半）500 より小さい数は何倍かすると 501、502、・・、1000 のどれかになり追加できない。

（正しくは次の問題４の答を参照のこと。500 個の巣箱には 500 羽しか入れません。）

問題４　1 から 2N（ただし、N≧1）　までの自然数の中から、どの２数についても互いに他で割り切れないように、N 個の数を選べ。また、N+1 個ではそういう選び方が不可能であることを示せ。

（答）（前半）問題３と同様に、N+1、N+2、N+3、・・・、2N の N 個。

（後半）　2N 以下の最大の奇数は 2N−1 だから、 $A_k = \{ 2^m(2k-1) \mid m = 0、1、2、\cdots\}$ とおくと、1 から 2N までの自然数は、A_1、A_2、A_3、・・・、A_N の N 個のどれかに属し、どのように N+1 個を選んでも 1 個余り、同じ A_k に含まれる２つの数が存在する。

２数を $2^m(2k-1)$ 、$2^n(2k-1)$（ $n > m$ ）とすると、　$2^n(2k-1)$　は $2^m(2k-1)$ で割り切れ２つの数を選ぶことは不可能。

問題５　相異なる７個の整数をどのように選んでも、その和か差が１０の倍数になる２数が含まれることを示せ。

（答）（本の余りにもエレガントなやり方）

10 で割った余りが k または 10−k になる整数全体を A_k とおく。

$A_k = \{10m+k、10m+(10-k) = 10(m+1) - k \mid m = 0、\pm1、\pm2、\pm3、\cdots\}$

$A_0 = \{ 0、\pm10、\pm20、\pm30、\cdots\}$ 、　$A_3 = \{\pm3、\pm7、\pm13、\pm17、\cdots\}$ 、

$A_1 = \{\pm1、\pm9、\pm11、\pm19、\cdots\}$ 、　$A_4 = \{\pm4、\pm6、\pm14、\pm16、\cdots\}$ 、

$A_2 = \{\pm2、\pm8、\pm12、\pm18、\cdots\}$ 、　$A_5 = \{\pm5、\pm15、、\cdots\}$　　の６個の箱ができる。

どんな７個の整数を選んでも、同じ A_k に含まれる２数がある。

10 で割った余りが等しければ差が、異なれば和が 10 の倍数になる。

よって、その和か差が 10 の倍数になる２数が含まれる。

問題６　　１から５０までの自然数５０個からなるどんな数列も、少なくとも８個の数からなる増加列または減少列を含むことを示せ。

（答）（本の解説を参考に）

(ｲ)　　１から５０までの５０個の自然数を並べて 数列 a_1、a_2、a_3、・・・、a_{50} をつくる。

(ﾛ)　　項 a_i から前に見て a_i で終わる減少列の最大の項数を x_i とする。

（例　4、8、6、9、<u>2</u> では（8、6、<u>2</u>）の 3 ）

(ﾊ)　　(ﾛ)と同様に、項 a_i から後に見て a_i で始まる増加列の最大の項数を y_i とする。

（例　<u>2</u>、10、5、7、3 では（<u>2</u>、5、7）の 3 ）

(ﾆ)　　(ﾛ)、(ﾊ)より、$m < n$ で、　　$a_m > a_n$ なら、　$x_m < x_n$ （減少列の長さは増加）

（…、a_m、…、a_n、…）　　　$a_m < a_n$ なら、　$y_m > y_n$ （増加列の長さは減少）

a_i と （x_i ，y_i ） は１対１に対応。（座標（x_i ，y_i ）を巣箱にする。）

問題文の「８個の数からなる増加列または減少列を含むことを示せ。」より、「最大７個しかない」とすると、それは「無理である（はみ出るなど）」を示せばよい。

巣箱として座標（x_i ，y_i ） $1 \leqq x_i \leqq 7$ 、 $1 \leqq y_i \leqq 7$ で $7 \times 7 = 49$ 箱、１箱不足する。

（本では一般化して、次の問題を提示）

問題７　　１から n^2+1 までの自然数からなるどんな数列も、n+1 個の数からなる増加列または減少列を含むことを示せ。

（本文から）・・・十分に基礎数学力を鍛え上げた人は、$n^2 = n \times n$ を見て、n×n の格子を思い浮かべ、(x,y) という座標の利用を思いつくかもしれません。・・・

基礎数学力が不十分なのか、50 = 7×7+1 はとても思い浮かばなかった。

分かりづらい部分もあるので、次に n = 2 として、2×2+1 = 5 の例を示す。

（例）1,2,3,4,5 から数列（3,1,2,5,4）をつくる。

第２項の 1 は前に見て減少列（3,1）で２個、

後ろに見て増加列（1,2,5）または（1,2,4）で３個を含む。

よって、第２項の 1 の巣箱（座標）は（2,3）、同様にしてそれぞれ、

第１項 3:(1,2)、第２項 1:(2,3)、第3項 2:(2,2)、

第４項 5:(1,1)、第５項 4:(2,1)　　　　　　　　３個の増加列を含む。

（他の例も作ってみてください。）