

「基礎数学トレーニング-Nの数学プロジェクト 根上生也+中本敦浩（日本評論社）」（その2）
ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

----- <問題など> -----

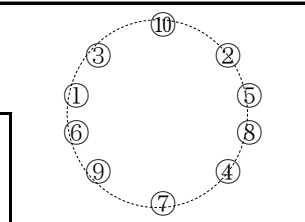
「平均以上、平均以下-Nの数学⑤」

問題1 円周上に1から10までの10個の自然数がランダムに並んでいる。このとき、円周上で隣り合う3つの数で、その合計が17以上になるものが存在することを示せ。

章のテーマが「平均」とあるから、平均が関係すると思われるが。

問題3 合計が20になる8個の自然数の中には、合計が4になる自然数の組（何個でもよい）が含まれていることを示せ。

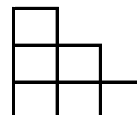
背理法をと思ったが、まともにやっても何とかやれそうです。



「計算しない数学-Nの数学⑥」

問題4 図（10段格子）（本では10段ですが3段にしてあります。）の中には、長方形（正方形も含む）はいくつあるか？

（3段の場合、数えると15になる。10段では？）



「構造を理解する-Nの数学⑦」

<この本による「グラフ理論」から>

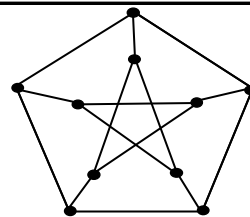
- マッチング : 2頂点を結ぶ辺の集合
- ハミルトン閉路 : すべての頂点を1度ずつ通るサイクル
- 完全マッチング : 余すことなく、すべての頂点をペアにできたときのマッチング
- 二部グラフ : 同じ色どうしは辺で結ばれていないように、頂点全体を白と黒で色分けできるグラフ。白と黒の頂点の個数が等しくないと、二部グラフには完全マッチングは存在しない。

問題1 ペテルセン・グラフ（右図）を描け。

（ピーターセングラフ（Petersen graph））

問題3 ペテルセン・グラフには、長さ4のサイクルがないことを示せ。

問題4 ペテルセン・グラフには、すべての頂点を1度ずつ通るサイクル（ハミルトン閉路）がないことを示せ。



今まで見たことも、聞いたこともないグラフ理論「ペテルセン・グラフ」の問題です。

問題4の考察などについては次回に回します。

----- <考察など> -----

「平均以上、平均以下-Nの数学⑤」

問題1 円周上に1から10までの10個の自然数がランダムに並んでいる。このとき、円周上で隣り合う3つの数で、その合計が17以上になるものが存在することを示せ。

（答） 10個の数の平均は、 $(1+2+3+\dots+10)/10 = 5.5$

3個の和の平均は、 $5.5 \times 3 = 16.5$

平均だから、17以上や16以下が存在する。

（本では、一般化した問題を示し、・・・こう一般化してしまうと、おもしろみのない問題になってしまいますね。～ そのおもしろみのない一般化した問題とは？ つくってみてください。）

問題3 合計が20になる8個の自然数の中には、合計が4になる自然数の組（何個でもよい）が含まれていることを示せ。

（答） 8個の自然数を $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$ ($a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_8$) とし、

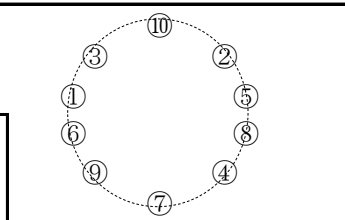
その和 S を $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8$ とする。

$a_4 \geq 4$ とすると、 $S \geq a_1 + a_2 + a_3 + 4 \times 5 > 20$ だから $a_4 \leq 3$ で $a_4 = 1, 2, 3$

(ア) $a_4 = 1$ のとき、 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ だから $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4$

(イ) $a_4 = 2$ のとき、 $a_1 = a_2 = 1$ か $a_1 = 1, a_2 = 2$ か $a_1 = 2$

いずれにしても、合計が4になる組がある。



(ウ) $a_4 = 3$ のとき、 $S = 20 \geq a_1 + a_2 + a_3 + 3 \times 5 \quad \therefore a_1 + a_2 + a_3 \leq 5$ 、 $a_1 \leq 3$

$a_1 = 1$ ならば $a_1 + a_4 = 1 + 3 = 4$

$a_1 \geq 2$ ならば $a_2, a_3 \geq 2$ となり $a_1 + a_2 + a_3 \geq 6$ で不可。

(本では、平均を利用した解答を、2～3ページにわたって解説している。)

「計算しない数学－Nの数学⑥」

問題4 図(10段格子)の中には、長方形(正方形も含む)はいくつあるか?

(答) (本の解答を参考にまとめた。) 階段のかどの点を結んだ斜辺(スロープ)を利用する。

<下の左図の長方形Aの場合>

縦2本、横2本と斜辺との4つの交点により、4辺が定まる。 ${}_{12}C_4 = 495$

<下の右図の長方形Bの場合>

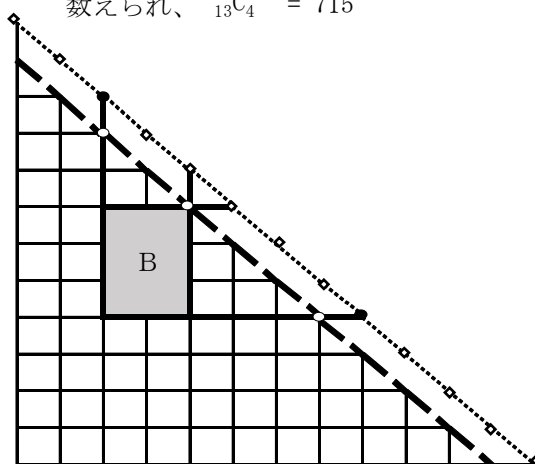
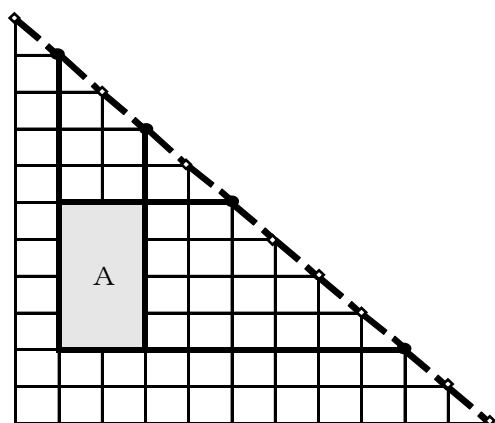
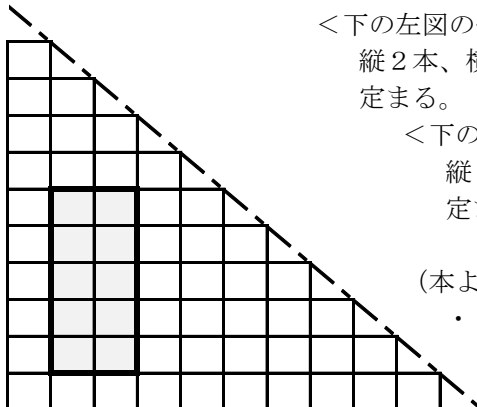
縦2本、横2本と斜辺との3つの交点により、4辺が定まる。 ${}_{12}C_3 = 220$

あわせて ${}_{12}C_4 + {}_{12}C_3 = 715$

(本より) 「人に言いたくなる数学」として、

・・・スロープを1つずらすと・・・として、次の解法を示している。(下の右図参照)

ずらすことによって、長方形AもBも同じ仲間として数えられ、 ${}_{13}C_4 = 715$



(感想) 鮮やかな解法に感激した。なお、

$${}_{13}C_4 = {}_{12}C_4 + {}_{12}C_3$$

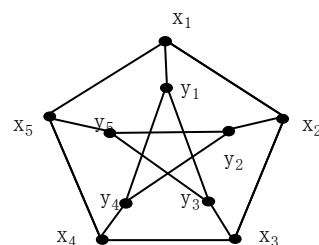
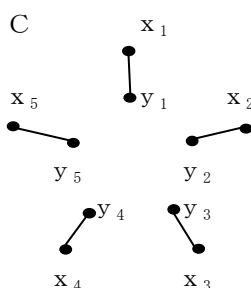
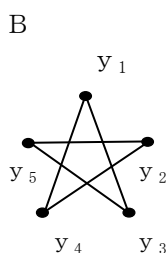
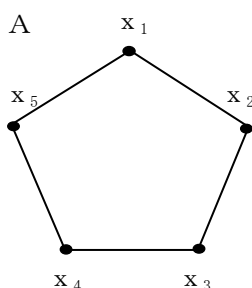
(参考: ${}_{n+1}C_r = {}_nC_r + {}_nC_{r-1}$)

「構造を理解する－Nの数学⑦」

問題1 ペテルセン・グラフ(右図)を描け。

(答) 構造として、次の3点に目が行く。

- 1 外側に五角形Aがある。
- 2 内側に星形Bがある。
- 3 五角形Aと星形Bを結ぶ継辺(本では「マッチング」)がある。



問題3 ペテルセン・グラフには、長さ4のサイクルがないことを示せ。

(本の答の概要) 1. 五角形A、星形Bはともに、長さ5のサイクル(閉路)である。

2. 長さ4のサイクルは、A、B、Cのいずれにも単独では含まれない。

3. A、Bにまたがることから、長さ4のサイクルはAの1辺と、その両端を通るCの継辺2本とBの1辺とになるが、BにはCの辺につながるそのような辺はない。

(私の答) 10個の頂点から始まる最小のサイクルは何れも長さ5であり、長さ4のサイクルはない。