数学散歩　Ⅳ - １４　　２０１６．７.α　　岐阜市　村山錞司

―　数学一般書のいろいろから　―

「基礎数学トレーニングーNの数学プロジェクト 根上生也＋中本敦浩（日本評論社）」（その３）

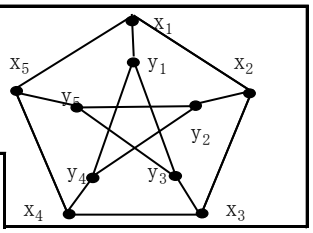
ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題など＞

「構造を理解するーNの数学⑦」

問題４

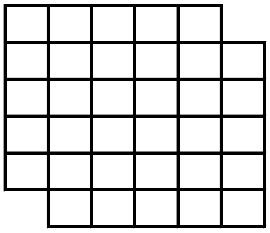
　ペテルセン・グラフ（右図）には、すべての頂点を１度ずつ通るサイクル（ハミルトン閉路） がないことを示せ。（再掲）



ヒマツブシ（？）で、「一筆書き」を楽しみました。

問題５

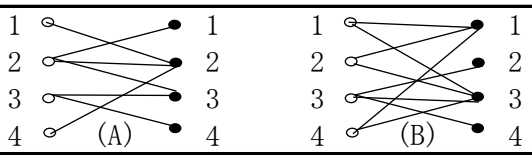
　図は１７畳の部屋を表している。この部屋に１７枚の畳を重なることなく敷き詰められるか？



実家の４畳半の「茶の間」を思い出します。

問題６

　右図の２つの二部グラフには、完全マッチングはあるか？

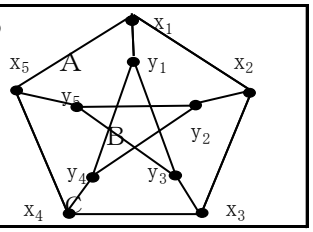


「あるか？」と聞かれれば、・・・・

＜考察など＞

「構造を理解するーNの数学⑦」

問題４　ペテルセン・グラフ（右図）には、すべての頂点を１度ずつ通るサイクル（ハミルトン閉路） がないことを示せ。（再掲）



ハミルトン閉路：すべての頂点を１度ずつ通るサイクル

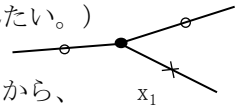
（本にはキチンとした答はない。思いつくまま、まとめてみた。）

前提１　外の五角形A、中の星形Bは、ともに単独で１つの閉路（サイクル）であるため、求める閉路にするには、A、Bそれぞれ通らない辺と、A、Bの間をつなぐ継辺Cの辺が必要である。

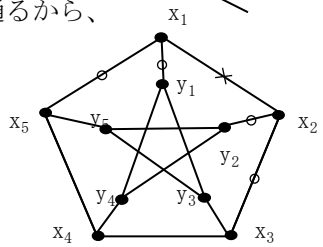
前提２　すべての頂点には３本の辺がつながっており、求める閉路に頂点すべてが含まれるためには、辺の２本は必ず通り、１本は通らないことが必要になる。

以下、A、C、Bの順に視点をおいて、考えてみた。なお、文中の通路の頂点の記述の順序は、思考した順になっている。　（各辺に○、×を記入し、確認されたい。）

（解１）　（五角形Aから）



１．　通らない辺を x_1x_2 とすると、閉路は４点 x_5、x_1、x_2、x_3　を通るから、



前提２より、道は　x_5x_1、　x_1y_1　～　y_2x_2、　x_2x_3　となる。

２．　y_1　～　y_2 の経路は次のいずれか。

(A) $y_1y_4y_2$　、(B) $y_1y_3y_5y_2$　、　(C)　（途中に）Aの辺を含む

３　　x_2x_3 の後、

(A) $y_1y_4y_2$　　Bの２点　y_3、y_5　が残っており、経路は　$x_3y_3y_5x_5$　となって、x_4 が不通過。

(B) $y_1y_3y_5y_2$　　y_4 が残っており、　経路は $x_3x_4y_4$　の後、y_1 または y_2 で２度目の頂点になり不可。

(C) Aの辺を含む　すでに２辺 x_2x_3、x_5x_1 を含んでいるから、　残る辺は x_3x_4 または x_4x_5

x_3x_4　は継辺　y_3x_3　が必要であるが、経路x_2x_3　があり通れない。（前提２）

x_4x_5　は継辺　x_5y_5　が必要であるが、経路x_5x_1　があり通れない。（前提２）

（解２）　（継辺Ｃで）

１．　五角形Ａ、星形Ｂにまたがる閉路だから継辺Ｃは２本または４本になる。

２．（対称性を考慮して）

(A) ２本の場合　x_1y_1 ～ y_2x_2 または x_1y_1 ～ y_3x_3 になる。

x_1y_1 ～ y_2x_2 については　$y_1y_4y_2$ か $y_1y_3y_5y_2$ になり　（その後、$x_2x_3x_4x_5$ で）

それぞれ　y_3、y_5 か y_4 を通らない。

x_1y_1 ～ y_3x_3 については　y_1y_3 か $y_1y_4y_2y_5y_3$　で、その後

x_3x_2 （x_2y_2（３本目）、y_2 が通れない)または　x_3x_4 （x_2 を通らず）

(B) ４本の場合　x_1y_1、が不通過で、他の４本は通るとする。

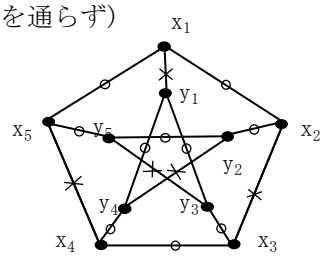
頂点 x_1 を通らなければならないから、前提２により

３辺　x_1x_2、x_1x_5、x_3x_4　を通り、

２辺　x_2x_3、　x_4x_5　は通らない。

２つの閉路、

$x_1x_2y_2y_5x_5x_1$ と $y_1y_3x_3x_4y_4y_1$　に分断され不適。

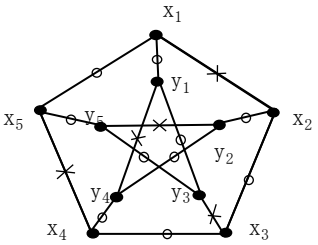


（解３）　（星形Ｂでは）

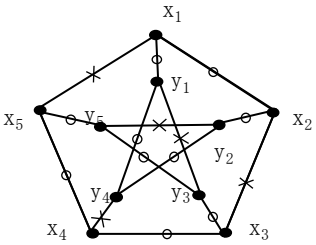
１．　前提１より、１つの辺は通らない。それを y_2y_5 とする。　前提２より、y_2x_2、　y_2y_4、y_5y_3、　y_5x_5、　を通る。　その他のＢの辺　y_1y_3、　y_1y_4　について、

(A)　y_1y_3　を通るとすると前提２により、　・・・、y_1y_4 を通らず、　$x_1y_1y_3y_5x_5x_1$ と　$x_2y_2y_4x_4x_3x_2$ に分断され不適。

(B)　y_1y_3　を通らないとすると前提２により、　・・・、y_1y_4 を通り、　$x_1y_1y_4y_2x_2x_1$ と　$x_5y_5y_3x_3x_4x_5$　に分断され不適。



（感想）
３通りの解法を示したが、今一つすっきりしない。本の指摘にあるように、シラミつぶしのように思う。ウマイ解法があればよろしく。

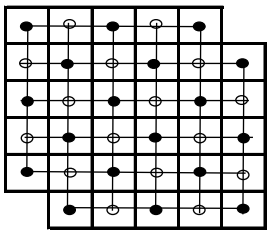


問題５　　図は１７畳の部屋を表している。この部屋に１７枚の畳を重なることなく敷き詰められるか？

（答）●１個、○１個のペア（縦でも、横でも）で１畳。（マッチング）

●は１８個、○は１６個で１７ペアにならず不可。

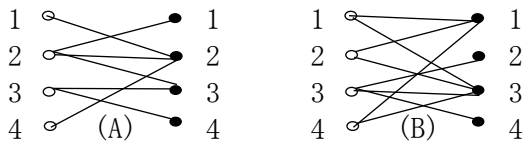
完全マッチングは存在しない。



問題６　　右図の２つの二部グラフには、完全マッチングはあるか？

（答）(A) (1, 4) → (2)　　で、なし。

(B) (1, 2, 4) → (1, 3)　で、なし。



追加の問題　　１本追加して完全マッチングにせよ。

結婚定理　ＸとＹを部集合とする二部グラフにおいて、①「完全マッチングが存在する」ための必要十分条件は、②「｜Ｘ｜=｜Ｙ｜で、かつ、Ｘの任意の部分集合Ｓに対して、Ｓに属す頂点に隣接しているＹの頂点の全体の個数が｜Ｓ｜以上である」　ことである。

「Hall の結婚定理」というそうである。インターネットで検索すると出てくる。参考にされたい。

追加の問題　　１本追加して完全マッチングにせよ。

（答）（１例として）

(A)　4 → 1　　を追加すると、　1 → 2、2 → 3、3 → 4、4 → 1

(B)　1 → 2　　を追加すると、　1 → 2、2 → 3、3 → 4、4 → 1

（他の例もいくつかあり）