数学散歩　Ⅳ-9　　　　　　　　　　　２０１６．４．β　　岐阜市　村山錞司

―　数学一般書のいろいろから　―

「マンホールのふたはなぜ丸い？暮らしの中の数学 中村義作（日本経済新聞社）」（その１）

昔、書名にひかれて買った本です。話題が豊富で、楽しめました。当時、県教育センターに勤めており、研修講座の参考に使ったものもあります。熟年（？）時代に戻った気分で再挑戦！面白そうなものを幾つか紹介します。問などは本文の内容を考え問題にしました。

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

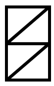
＜問題など＞

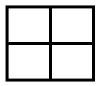
「タイル張り－五角形、六角形のタイルでもすき間なくきっちり」

（本文から）・・・同じ形、同じ大きさの図形を使って、平面を埋めつくす・・・一種類の図形による平面のタイル張りを、三角形はともかく、どんな四角形もタイル張りできるが、・・・一方、凸多角形に限定すると、七角形以上は、どんな形でもタイル張りができない。・・・

問１　三角形、四角形についてはどんな形でもタイル張りできることを示せ。また、参考例を図示せよ。

問２　七角形以上はタイル張りできないことを示せ。





問３　五角形、六角形のタイルの例を考えよ。

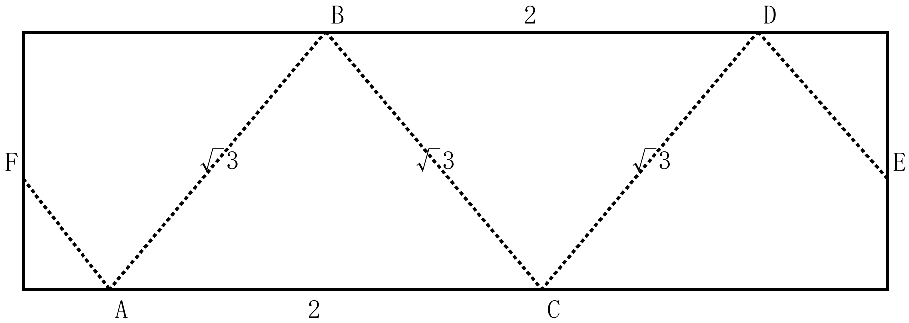
本によれば、敷きつめ方が同じならば同じタイプとして、これまで五角形では１３種類、六角形では４種類発見されているとのこと。その中から本では２種類ずつ紹介している。

頭の体操になり、クイズ、パズルとしていろいろ楽しめます。

「三角パック－製造も運搬も容易な牛乳容器」

下図のような長方形の厚紙を、（のりしろを適当につけて）　FA、AB、BC、CD、DE で折り曲げ、立体にすると不思議な四面体ができます。

＜積み上げ可能な四面体の展開図＞（本の図から）



$AB = BC = CD$

$DE + FA = \sqrt{3}$ 、

$AC = BD = 2$

（本文から）８個をうまく組み合わせると、もとと同じ形で、ひとまわり大きい四面体ができる。・・・３個をうまく組み合わせると、形は少しひずんでいるが、プリズム形の三角柱ができる。そして、この三角柱を垂直に切った断面はズバリ正三角形になる。・・・

問１　四面体ABCD の見取り図を描き、その体積を求めよ。

問２　四面体を８個組み合わせて寸法が２倍の四面体になるような見取り図を描け。

問３　三角柱の断面の正三角形の１辺の長さを求めよ。

私も実際にボール紙を鋏で切って四面体を８個つくり、あれこれくっつけ妙な気分になりました。

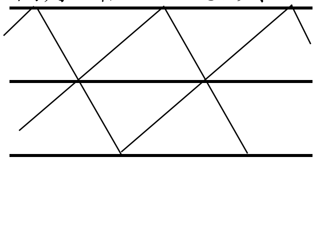
＜考察など＞

「タイル張り－五角形、六角形のタイルでもすき間なくきっちり」

問１　三角形、四角形についてはどんな形でもタイル張りできることを示せ。また、参考例を図示せよ。

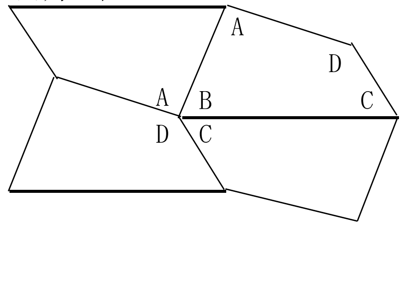
＜三角形＞

内角の和 180°より、



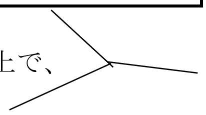
＜四角形＞

内角の和 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ より、



問２　七角形以上はタイル張りできないことを示せ。

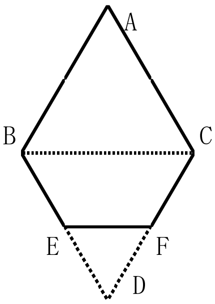
（証明）　１つの内角の平均は　180°×(7-2)/7 = 900°/7 以上で、
１点に集まるタイルは３個以上、内角の和の平均は　3×900°/7 ≒385° 以上で、
360° より大きい。どこかの点で３個以上のタイルは収まらない。



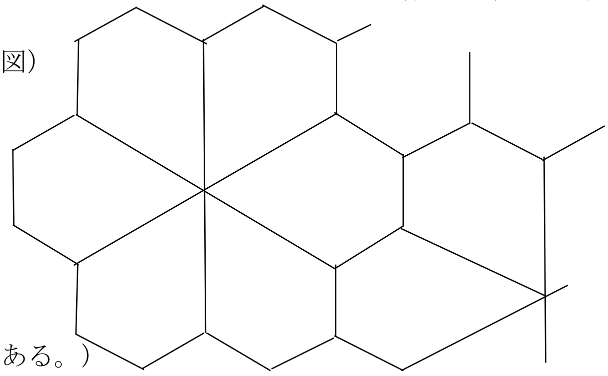
問３　五角形、六角形のタイルの例を考えよ。

＜五角形＞　内角の和は、180°×3 = 540°　　（例１、２は本から----本の図を勝手に解釈した。）

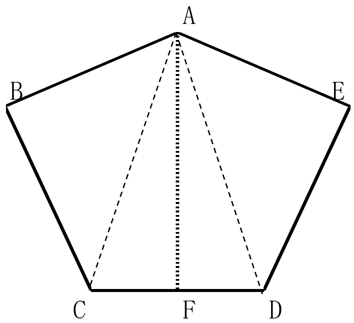
（例１）



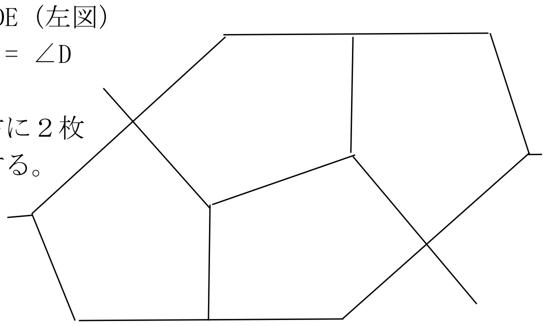
60° + 120°×4 = 540°
タイルは五角形ABEFC（左図）
△ABC、△BDC は正三角形
E、F は辺BD、DC の中点
60°×6 = 360°
120°×3 = 360°
を利用して、６枚を
１セットとする。（右図）



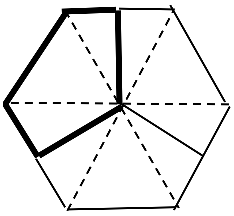
（例２）　（下田駅前の舗装に使われていたそうである。）



タイルは等辺五角形ABCDE（左図）
∠B = ∠E = 90°、∠C = ∠D
∠A + ∠C + ∠D = 360°
このタイルを上下、左右に２枚
ずつ４枚を１セットとする。
（右図）

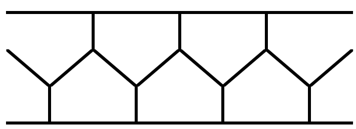


（私案１）

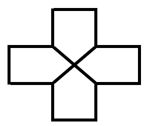


正六角形を１つおき
の辺の中点と中心を
結んだ線で３つに分
割した１つを１枚の
タイルとする。（左図）
３枚を１セット。

（私案２）

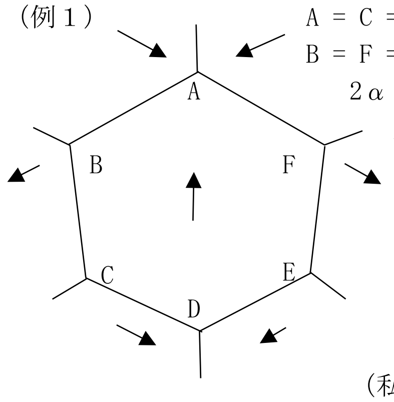


（私案３）



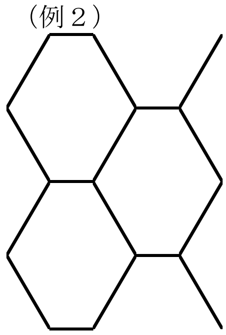
＜六角形＞　内角の和は、180°×4 = 720°　（例１、２は本から----本の図を勝手に解釈した。）

（例１）

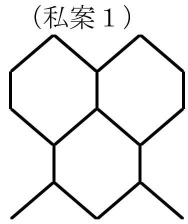


A = C = E = 120°、
B = F = α、D = β
$2\alpha + \beta = 360°$
矢印
はタイルの向き
３枚で１セット。

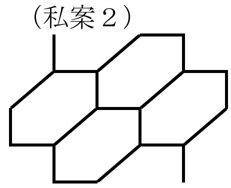
（例２）



（私案１）



（私案２）

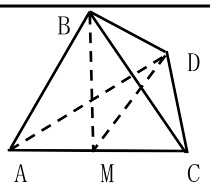


（私案１、２は例１と同じタイプかも？）

＜五角形、六角形で別のタイルの案がありましたらお教えください。よろしく。＞

「三角パック－製造も運搬も容易な牛乳容器」

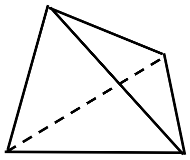
問１　四面体ABCD の見取り図を描き、その体積を求めよ。



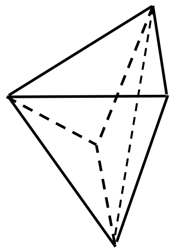
AB = BC = CD = $\sqrt{3}$、AC = BD = 2
AC の中点を M とすると、
AM = 1、BM = DM = $\sqrt{2}$ で BD = 2 だから
△BDM は∠M = 90° の直角二等辺三角形。　平面ABC⊥平面ADC
体積は、　$(1/3)\times(1/2)\times2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2} = 2/3$

問２　四面体を８個組み合わせて寸法が２倍の四面体になるような見取り図を描け。

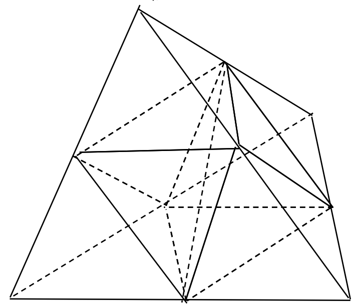
１×３個（上、下左、下右）



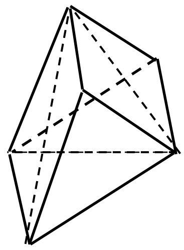
２個（真ん中、四角錐）



あわせて８個



３個（右の奥、斜め三角柱）



問３　三角柱の断面の正三角形の１辺の長さを求めよ。

（答）　$\frac{2\sqrt{6}}{3}$

（本文から）では、どんな四面体なら、すき間を作らずに積み上げることができるだろうか。ごく限られた形のものだけが可能である。その中で正四面体に近いものを紹介すると、平面に広げたものが（前掲の展開図）・・・

（疑問１）展開図が考えられた理由として、前記問２の真ん中の図の四角錐からと思われるが如何？

（疑問２）限られた形とあるが、これ以外にどんな形が考えられるか？

＜何かヒントでもいただければ・・・＞