数学散歩　Ｖ－１　　　　　　　　　２０１６．９ α　　岐阜市　村山錞司

―　数学教養書の中から　―

「青春の日の数学セミナー　中沢貞治（現代数学社）」（その１）

３０代の頃手にした本で、久し振りに読み直しをしてみた。昔はいい加減に読んだようで、なかなか頭の中に入ってこなくて困った。参考になりそうな事項を整理して紹介する。
(「はしがき」から少し抜粋) この書物は高校２、３年から大学１、２年の皆さんを対象にして書きました。・・、大学に進めば教養課程で、専門の基礎として数学を学びます。・・・先生方の講義は定理とその証明が主で、・・青春の日が、数学の醍醐味を知らないまま過ぎるのです。・・・以下、云々

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題など＞

「Ｔｏｐｉｃ　１　相加平均と相乗平均」

文字はすべて正数とする。

Ⅰ $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$　　Ⅱ $\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$　　Ⅲ $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$

いずれも等号は文字が等しいときに限る。

（証明（概略））Ⅰ $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geqq 0$ より。等号は $a=b$ のときに限る。

Ⅰ→Ⅲ　$\dfrac{a+b+c+d}{4} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a+b}{2} + \dfrac{c+d}{2}\right)$

$\geqq \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}\right) \geqq \sqrt[4]{abcd}$　　等号は $a=b=c=d$ のときに限る。

Ⅲ→Ⅱ　$\dfrac{a+b+c}{3} = M$ とする。Ⅲより、$\dfrac{a+b+c+M}{4}$　$\left(= \dfrac{3M+M}{4} = M\right) \geqq \sqrt[4]{abcM}$

だから、$M^4 \geqq abcM$　よって、$M \geqq \sqrt[3]{abc}$　　等号は $a=b=c\ (=M)$ のときに限る。

Ⅳ　　a_1、a_2、・・・、a_n が正数のとき $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

等号は、$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のときに限る。

課題Ａ　　Ⅳ を証明せよ。

Ⅳは I 、Ⅱ、Ⅲの一般化であり、前記の I →Ⅲ、Ⅲ→Ⅱと同様に証明できる。

$a>0$、$x>0$ のとき、$f_2(x) = a + x - 2\sqrt{x}$ の増減を調べ、前記 I の不等式を証明せよ。

（証明の概略）　微分して増減を調べ、$x=a$ で最小となり、$x=b$ とおけば I を得る。

課題Ｂ a_1、a_2、・・、$a_{n-1} > 0$ 、$x > 0$ のとき、

$f_n(x) = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + x - n\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot x}$

とおいて Ⅳ を証明せよ。　　　　　　　　　　　　　　　（大阪市大 s 42 ）

前問と同様。

＜手持ちの昔の資料から Ⅳ の証明に関する問題を紹介する。等号成立については省略した。＞

課題Ｃ　　Ⅳ を次の⑴、⑵、⑶ を示すことにより証明せよ。

⑴　　$n = 2^m$（m 自然数）で表されるすべての自然数 n について Ⅳ が成立することを、自然数 m についての帰納法により示せ。

⑵　　$n = k$ のとき Ⅳ の成立を仮定すると、$n = k-1$ のときも Ⅳ が成立することを示せ。

⑶　　⑴、⑵ からすべての自然数 n について Ⅳ が成立することを示せ。

逆向きの帰納法です。発想が面白い。

＜考察など＞

Ⅳ　　a_1、a_2、・・・、a_n が正数のとき $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

等号は、$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のときに限る。

課題Ａ　　Ⅳ を証明せよ。

（証明）　（以下、等号の成立については省略）

$n = 2$ のとき、　I より成立

$n = 2^m$ (m は正数) のとき成立を仮定すると、$2n = 2^{m+1}$ のとき、

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n}}{2n} \geqq \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{2n}}\right)$$

$$\geqq \sqrt[2n]{a_1a_2\cdots a_{2n}}$$　$2n = 2^{m+1}$ のとき成立する。

n が 2 のベキでない($n \neq 2^m$)とき、$2^m < n < 2^{m+1}$ となる正の正数 m がある。

$M = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ 、$N = 2^{m+1}$ とおき、

n 個の a_1、a_2、・・・、a_n と $N - n$ 個の M を合わせた $N = 2^{m+1}$ 個の平均を考えると、

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n + (N - n)M}{N} \geqq \sqrt[N]{a_1a_2\cdots a_nM^{N-n}}$$

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = nM$ だから、$M^N \geqq a_1a_2\cdots a_nM^{N-n}$ ∴ $M^n \geqq a_1a_2\cdots a_n$

($M =$) $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

課題B　a_1、a_2、・・・、$a_{n-1} > 0$ 、$x > 0$ のとき、

$f_n(x) = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + x - n\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_{n-1}\cdot x}$

とおいて Ⅳ を証明せよ。　(大阪市大 s 42)

(証明の概要)　$f_n'(x) = 1 - (\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_{n-1}\cdot x})/x$

$\alpha = \sqrt[n-1]{a_1\cdot a_2\cdots a_{n-1}}$ とおくと $\alpha^{n-1} = a_1\cdot a_2\cdots a_{n-1}$ で

$a_1\cdot a_2\cdots a_{n-1}\cdot\alpha = \alpha^n$ ∴ $f_n'(\alpha) = 1 - \alpha/\alpha = 0$

$f_n(x)$ は $x = \alpha$ で最小値 $f_n(\alpha)$ をとる。

$f_n(x) \geqq f_n(\alpha) = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + \alpha - n\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_{n-1}\cdot\alpha}$

$= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} - (n-1)\alpha = \underline{a_1 + \cdots + a_{n-1} - (n-1)\sqrt[n-1]{a_1\cdots a_{n-1}}}$ …★

(以下、帰納法による。)

$n = 2$ のとき　$f_2(x) = a_1 + x - 2\sqrt{a_1\cdot x} \geqq f_2(a_1) = 2a_1 - 2a_1 = 0$

$x = a_2$ とすれば、Ⅳで $n = 2$ のとき成立

$n-1$ のとき Ⅳ の成立を仮定すると、$a_1 + \cdots + a_{n-1} - (n-1)\sqrt[n-1]{a_1\cdots a_{n-1}} \geqq 0$

★より、$x > 0$ のとき $f_n(x) \geqq 0$　$x = a_n > 0$ とすれば Ⅳ が成立

課題C　Ⅳ を次の(1)、(2)、(3) を示すことにより証明せよ。

(1)　$n = 2^m$ (m 自然数) で表されるすべての自然数 n について Ⅳ が成立することを、自然数 m についての帰納法により示せ。

(2)　$n = k$ のとき Ⅳ の成立を仮定すると、$n = k-1$ のときも Ⅳ が成立することを示せ。

(3)　(1)、(2) からすべての自然数 n について Ⅳ が成立することを示せ。

(証明)　(1)　課題Aと同じ

(2)
$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1} = \frac{1}{k}\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1}\right)$$

$$\geqq \sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_{k-1}\cdot\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1}}$$

$$\therefore \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1}\right)^k \geqq a_1a_2\cdots a_{k-1}\cdot\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1}$$

$$\therefore \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1} \geqq \sqrt[k-1]{a_1a_2\cdots a_{k-1}}$$　$k-1$ のときも成立

(3)　(1)、(2) により 2^m、2^m-1、2^m-2、・・・について成立するから、
すべての自然数 n について成立

＜昔の大学入試問題から＞(問題のみ紹介する。証明等は次回に回した。)

問題1　(秋田大 S 55)

(1)　$a \geqq 1$、$0 < b \leqq 1$ ならば　$a + b \geqq 1 + ab$ を証明せよ。

(2)　$a_1\cdot a_2\cdots a_n = 1$ である n 個の正数　a_1、a_2、・・・、a_n に対して
不等式　$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqq n$　を数学的帰納法で証明せよ。

(3)　(2) を用いて、任意の n 個の正数 a_1、a_2、・・・、a_n に対して
$\dfrac{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n}{n} \geqq a_1a_2\cdots a_n$ を証明せよ。

問題2　(慶応大 S 44、(類) 鹿児島大 S 54)

⑴　$x > 0$ のとき $f(x) = \dfrac{a - x}{x} + \log x$ の最小値を求めよ。

⑵　$f_1(x)$、$f_2(x)$、・・・、$f_n(x)$、$\Sigma_{k=1}^{n} f_k(x)$ の最小値を m_1、m_2、・・・、m_n、M とすれば、 $M \geqq m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ を示せ。

⑶　$a_k > 0$ ($k = 1$、2、・・・、n) のとき、次の不等式を証明せよ。

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \qquad (\mathrm{IV})$$

問題３　（鹿児島大 S 57 ）

$f(x)$ は $a < x < b$ で $f''(x) < 0$ をみたすとき、次を証明せよ。

⑴　$a < c < b$、$a < d < b$、$p \geqq 0$、$q \geqq 0$、$p + q = 1$ のとき

$$f(pc + qd) \geqq p\,f(c) + q\,f(d)$$

⑵　$a < c_k < b$ ($k = 1$、2、・・・、n) のとき

$$f\left(\frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n}\right) \geqq \frac{f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)}{n}$$

問題４　（横浜大 S ？）

⑴　p が正の数で、n が 1 より大きい自然数のとき、$f(x) = x^n - np^{n-1}x$ ($x > 0$) の最小値を求めよ。

⑵　⑴ の結果において、$x = \sqrt[n]{a_n}$ とおくことにより、次の不等式を証明せよ。ただし、$a_k > 0$ ($k = 1$、2、・・・、n) とする。

$$n\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}\right) \geqq (n-1)\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} - \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}\right)$$