数学散歩　Ｖ－10　　　　　　　　　２０１７．１．β　　岐阜市　村山錞司

―　数学教養書の中から　―

「青春の日の数学セミナー　中沢貞治（現代数学社）」（その１０）

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜お年玉問題の追加＞

＜本題＞　二人の持ち金の比率が m ： n で、その中の 1 ずつの賭けで、どちらかの持ち金がなくなるまでゲームを続ける。最初の持ち金が m の方が勝つ確率は $p(m,n) = m/(m+n)$ であることを示す。（参考の追加　m、n ≠ 0 のとき、$p(m,n) = (1/2)\cdot\{p(m+1,n-1) + p(m-1,n+1)\}$
問題Ｂ　m≠0、n≠0 で、 m + n = 5、6 のとき上記本題を確認せよ。できれば一般の m、n も。

＜問題と考察など＞

「Ｔｏｐｉｃ　１０　Ｒｅｃｕｒｒｅｎｔ　Ｎｕｍｂｅｒｓ　（Ａ）」

（本文から）しばらく平方数につき合って下さい。・・入学試験に次の問題を出したことがあります。

（Ａ）３けたの正の整数の中に、その百位の数字をとり去ってできる、２けたの整数の平方に等しいものがあるか、あれば、それをすべて求めよ。

（受験生になった気分で楽しんでみました。）

（私の解）a、b、c は１桁の正整数とすると、求める数を次のようにおける。

$100a + 10b + c = (10b + c)^2 = 100b^2 + 20bc + c^2$

$1 \leqq a \leqq 9$ だから $1 \leqq b \leqq 3$　また、c^2 の１位の数が c に等しいから、c = 0、1、5、6

c = 0 のとき　$100a + 10b = 100b^2$　で　10b = 0 より　b = 0　　２けたにならず不可

c = 1 のとき　$100a + 10b + 1 = 100b^2 + 20b + 1$　　b = 0　　２けたにならず不可

c = 5 のとき　$100a + 10b + 5 = 100b^2 + 100b + 25$　　b = 2、a = 6 で $25^2 = 625$

c = 6 のとき　$100a + 10b + 6 = 100b^2 + 120b + 36$　　10位の数を比べて、

$2b + 3 = b + 10p$ より、$b = 10p - 3$　$1 \leqq b \leqq 3$ だから不可

以上から、求める３けたの数は 625

（本では）　君はカンがよいから、その数は６２５であることを、たちまち見抜いてしまうかも知れませんね。・・・ ポリアも私と同じ立場でこの６２５を問題にしているのです。・・・

＜ポリアの「数学の問題の発見的解き方 第Ⅰ、Ⅱ巻（みすず書房）の第Ⅰ巻158頁には＞

$(he)^2 = she$（he と she は 10 進法の普通の数）となるような he と she を求めよ。

となっており、前掲（Ａ）より、ピリッときて痛快ですね。それにポリア先生の方が素直で、私の方が意地悪だということも、・・・何故かと言うに、・・・３けたの整数全部について、・・チェックして行こうとした受験生がかなりの数にのぼったからです。（900 回近くで大変です！！）

（次に、私と同様の解答があり、次の問題（Ｂ）を出題）

（Ｂ）４けたの正の整数の中で、その千位、百位の数字をとり去ってできる、２けたの整数の平方に等しいものがあるか、あれば、それをすべて求めよ。
（ポリア先生流に書けば）$(me)^2 = same$ で me、same を求めよ。

（私の解答例）　問題（Ａ）と同様にする。

$1000s + 100a + 10m + e = (10m + e)^2 = 100m^2 + 20me + e^2$　として $\underline{76}^2 = 57\underline{76}$　を得る。

＜本による（Ａ）、（Ｂ）の解答例＞

（Ａ）（$(he)^2 = she$）；　$100y + x = x^2$（$10 \leqq x \leqq 31$、$1 \leqq y < 9$）（$x = he$、$x^2 = she$、$y = s$）

$x^2 - x = 100y$ より　$x(x-1) = 2^2\cdot 5^2 y$　　$x(x-1)$ は 5^2 の倍数で、連続２整数の積

x か x-1 のどちらかが 25 の倍数で、$10 \leqq x \leqq 31$

x = 25 のとき x-1 = 24、y = 6　　$25^2 = 625$

x-1 = 25 のとき x = 26、y = 26/4 = 13/2 で不可　　答　$6\underline{25} = \underline{25}^2$

（Ｂ）（$(me)^2 = same$）；$100y + x = x^2$（$32 \leqq x \leqq 99$、$10 \leqq y < 99$）　（$x = me$、$x^2 = same$、$y = sa$）

（Ａ）と同様にして、　$x(x-1) = 2^2\cdot 5^2 y$　　$x(x-1)$ は 5^2 の倍数で、連続２整数の積

x か x-1 のどちらかが 25 の倍数で、$32 \leqq x \leqq 99$

x = 50 のとき x-1 = 49　　$50\cdot 49 \neq 100y$ で不可

x = 75 のとき x-1 = 74　　$75\cdot 74 \neq 100y$ で不可

x-1 = 50 のとき x = 51　　$50\cdot 51 \neq 100y$ で不可

x-1 = 75 のとき x = 76　　$75\cdot 76 = 5700$ で y = 57　　答　$57\underline{76} = \underline{76}^2$

（本文から）　$\underline{25}^2 = 6\underline{25}$ 、 $\underline{76}^2 = 57\underline{76}$　となるので、その平方の中に<u>再現する</u>という意味で、これらを<u>Ｒｅｃｕｒｒｅｎｔ　Ｎｕｍｂｅｒｓ</u> と呼ぶことにします。・・・ <u>Ｒ数</u> とし・・・

２けたであれば $\underline{R_2}$ のように書きます。

R_1 は 5 と 6 で $5^2 = 25$、 $6^2 = 36$ 、 R_2は 25 と 76 で $25^2 = 625$、$76^2 = 5776$

（C） R_3、R_4 があるかどうか、あれば、それを求めよ。

＜R_3について＞ （$(ame)^2$ = shame か $(way)^2$ = midway のどちらか。）

（本によると） $x^2 = 1000y + x$ （$100 \leqq x \leqq 999$、$10 \leqq y < 999$）

$x^2 - x = x(x-1) = 2^3 \cdot 5^3 y$、 x、x−1 は連続２整数だから x か x−1 が $5^3 = 125$ の倍数

x	125	250	375	500	625	750	875	760	885	
x−1	124	249	374	499	624	749	874	759	884	$625^2 = 390\underline{625}$
y	15.5	62.25	140.3	249.5	390	561.8	764.8	576.8	782.3	
x−1	125	250	375	500	625	750	875	760	885	
x	126	251	376	501	626	751	876	761	886	$376^2 = 141\underline{376}$
y	15.75	62.75	141	250.5	391.3	563.3	766.5	578.4	784.1	

でどちらも、$(way)^2$ = midway の形。なお、R_4 については後に別のやり方で対応している。

（本文から） (ｲ) $\underline{R_2\ (2けた)は\ 10a_1 + R_1}$ 、 (ﾛ) $\underline{R_3\ (3けた)は\ 10a_2 + R_2}$ の形になっているし、…

(ｲ)、(ﾛ)の a_1、a_2 を 1、2、3、…、9 の中からそれぞれ $\underline{R_2^2 = 100y_2 + R_2}$ 、 $\underline{R_3^2 = 1000y_3 + R_3}$ を満足するように選ぶのも１つの方法ではないか。… （以後の参考にした。）

＜Ａ列（１位の数が 5 ）＞ （（参考） $A_n = 10^{n-1}a_{n-1} + A_{n-1}$ で $A_n^2 = 10^n y_n + A_n$ ）

$A_1 = 5$ （$5^2 = 25$）、 $A_2 = 25$ （$25^2 = 625$）、 $A_3 = 625$ （$625^2 = 390625$）、

$A_4 = 1000a_3 + A_3$ とおくと、$A_4^2 = 10000y_4 + A_4$

$A_4^2 = (1000a_3 + A_3)^2 = 1000000a_3^2 + 2000a_3A_3 + A_3^2$ （$A_3 = 625$ （$625^2 = 390625$） だから）

$= 10000y_4 + 0625$ よって $A_4 = (0625)$ （ 0625 は４けたでないので( )つき）

∴ $A_4 = (0625)$、$A_4^2 = 0625^2 = 39\underline{0625}$

$A_5 = 10000a_4 + A_4$ とおくと、$A_5^2 = 100000y_5 + A_5$

$A_5^2 = (10000a_4 + A_4)^2 = 10^8a_4^2 + 20000a_4A_4 + A_4^2$ （$A_4 = (0625)$ （$625^2 = 390625$） だから）

$= 100000y_5 + 90625$ よって $A_5 = 90625$

∴ $A_5 = 90625$、$A_5^2 = 90625^2 = 8212\underline{890625}$

問　　電卓（８けた？）で A_5^2 の値を確認せよ。

(90000 + 625)×90625 などと分けた式を展開し計算、筆算で足す。

＜Ｂ列（１位の数が 6 ）＞ （本には B_4、B_5 の計算、説明などの記述はない。）

$B_1 = 6$ （$6^2 = 36$）、 $B_2 = 76$ （$76^2 = 5776$）、$B_3 = 376$ （$376^2 = 141376$）、

$B_4 = \underline{1000b_3 + B_3}$ とおくと、$B_4^2 = 10000y_4 + B_4 = 10000y_4 + \underline{1000b_3 + 376}$

$B_4^2 = (1000b_3 + B_3)^2 = 1000000b_3^2 + 2000b_3B_3 + B_3^2$ （$B_3 = 376$）

$= 1000000b_3^2 + 752000b_3 + 141376$

$= 10000(100b_3^2 + 75b_3 + 14) + \underline{1000(2b_3 + 1) + 376}$

よって、$2b_3 + 1 = b_3 + 10p$ 、$b_3 = 10p - 1$ ∴ $p = 1$、$b_3 = 9$ （b_3 は１けた）

∴ $B_4 = 9376$、$B_4^2 = 9376^2 = 8790\underline{9376}$

$B_5 = 10^4b_4 + B_4$ とおくと、$B_5^2 = 10^5y_5 + B_5 = 10^5y_5 + \underline{10^4b_4 + 9376}$

$B_5^2 = (10^4b_4 + B_4)^2 = 10^8b_4^2 + 2 \cdot 10^4b_4 \cdot 9376 + 9376^2$ （$B_4 = 9376$）

$= 10^8b_4^2 + 10^4 \cdot 18752b_4 + 87909376$

$= 10^5(1000b_4^2 + 1875b_4 + 879) + \underline{10^4 \cdot 2b_4 + 09376}$

よって、$2b_4 = b_4 + 10p$ 、$b_4 = 10p$ ∴ $p = 0$、$b_4 = 0$ （b_4 は１けた）

∴ $B_5 = (09376)$、$B_5^2 = 09376^2 = 879\underline{09376}$

＜お年玉問題の追加の解答例＞

問題Ｂ　$m \neq 0$、$n \neq 0$ で、 $m + n = 5$、6 のとき上記本題を確認せよ。できれば一般の m、n も。

（解答例） 参考として、$m + n = 5$ のときの私の解答例を紹介。

$p(1,4)=(1/2)\{p(2,3)+0\}$ ∴ $p(2,3)=2 \cdot p(1,4)$

$p(2,3)=(1/2)\{p(3,2)+p(1,4)\}$ ∴ $p(3,2)=2 \cdot p(2,3)-p(1,4)=3 \cdot p(1,4)$

$1=p(2,3)+p(3,2)=5 \cdot P(1,4)$ ∴ $p(1,4)=1/5$ だから、

$p(2,3)=2/5$、$p(3,2)=3/5$、$P(4,1)=1-p(1,4)=4/5$

$m + n = 6$ のとき、一般の m、n についても同様。