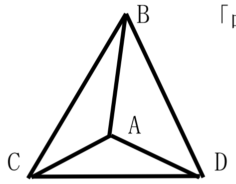
数学散歩　Ｖ‐１１　　　　　　　　　　２０１７．２．α　　岐阜市　村山錞司

―　数学教養書の中から　―

「青春の日の数学セミナー　中沢貞治（現代数学社）」（その１１）

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜ヒマ人のヒマツブシ＞

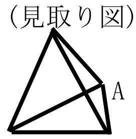


「凸か凹か？」

三角錐（四面体）Ａ－ＢＣＤ の平面図です。頂点Ａは平面ＢＣＤ（この紙面）のこちら側か、向こう側のどちらの方に向いて見えますか？（左図、右図とも）

（私の感想などは、本報告の終りに）

（見取り図）



＜問題と考察など＞

「Ｔｏｐｉｃ １１　Ｒｅｃｕｒｒｅｎｔ　Ｎｕｍｂｅｒｓ　（Ｂ）」

（本から）（Ａ）列、（Ｂ）列をよこに並べて、たてに加えたら、夢のようなキレイな関係 ！！

（Ａ）	5	25	625	625	90625	890625
＋　（Ｂ）	6	76	376	9376	9376	109376
	11	101	1001	10001	100001	1000001

（予想）　$A_n + B_n = 10^n + 1$

（本文から）R_n（A_n と B_n）は n けたの数 x で、$x^2 = 10^n y + x$ を満足する。

式を変形して、$x^2-x = x(x-1) = 2^n \cdot 5^n y$ から

⑴ $\begin{cases} x = 5^n X_{n-1} \\ x-1 = 2^n Y_{n-1} \end{cases}$ $(0<X_{n-1}<2^n)$ 、 ⑵ $\begin{cases} x-1 = 5^n X'_{n-1} \\ x = 2^n Y'_{n-1} \end{cases}$ $(0<X'_{n-1}<2^n)$

（私の勝手な解釈として）

(ｲ)　x-1、x は連続２整数だから、２と５が x-1、x の両方に同時に含まれることはなく、それぞれ、どちらか一方にまとめて含まれる。

(ﾛ)　x は n けただから、$x = 5^n X_{n-1} < 10^n = 2^n \cdot 5^n$ ∴ $0<X_{n-1}<2^r$ 同様に、$0<X'_{n-1}<2^n$

⑴、⑵を満足する X_{n-1} 、 Y_{n-1} 、 X'_{n-1} 、 Y'_{n-1} が求められれば、

$A_n = 5^n X_{n-1}$ ⑴　、 $B_n = 5^n X'_{n-1} + 1$ ⑵　　… ★

また、⑴、⑵から x を消去すると、

$\begin{cases} 5^n X_{n-1} - 2^n Y_{n-1} = 1 & (0<X_{n-1}<2^n) \\ 5^n X'_{n-1} - 2^n Y'_{n-1} = -1 & (0<X'_{n-1}<2^n) \end{cases}$

２式をたして、　$5^n(X_{n-1} + X'_{n-1}) = 2^n(Y_{n-1} + Y'_{n-1})$ より、

$X_{n-1} + X'_{n-1}$ は 2^n の倍数で、$0 < X_{n-1} + X'_{n-1} < 2 \cdot 2^n$ だから $Xn-1 + X'_{n-1} = 2^n$

★より、 $A_n + B_n = 10^n + 1$

課題 $\begin{cases} 5^n X_{n-1} - 2^n Y_{n-1} = 1 & (0<X_{n-1}<2^n \ ,\ 0<Y_{n-1}<5^n) \\ 5^n X'_{n-1} - 2^n Y'_{n-1} = -1 & (0<X'_{n-1}<2^n \ ,\ 0<Y'_{n-1}<5^n) \end{cases}$
を解いて、n = 1～5 のときの $A_n = 5^n X_{n-1}$ 、 $B_n = 5^n X'_{n-1} + 1$ を求めよ。

（本には、答のみで計算などの説明はない。）

＜n = 1 のとき＞

$5X_0 - 2Y_0 = 1$　$(0<X_0<2\ ,\ 0<Y_0<5)$

$X_0 = 1$, $Y_0 = 2$ のとき $5 - 4 = 1$　　　$A_1 = 5 \cdot 1 = 5$

$5X'_0 - 2Y'_0 = -1$　$(0<X'_0<2\ ,\ 0<Y'_0<5)$

$X_0 = 1$, $Y_0 = 3$ のとき $5 - 6 = -1$　　　$B_1 = 5 \cdot 1 + 1 = 6$

＜n = 2 のとき＞

$25X_1 - 4Y_1 = 1$　$(0<X_1<4\ ,\ 0<Y_1<25)$

$Y_1 = \frac{25X_1-1}{4} = 6X_1 + \frac{X_1-1}{4}$　より $X_1 = 1$, $Y_1 = 6$　　　$A_2 = 5^2 \cdot 1 = 25$

$25X'_1 - 4Y'_1 = -1$　　$(0<X'_1<4$　、$0<Y'_1<25)$

$Y'_1 = \dfrac{25X'_1+1}{4} = 6X'_1 + \dfrac{X'_1+1}{4}$ より $X'_1=3$ 、$Y'_1 = 19$　　$B_2 = 5^2\cdot 3+1 = 76$

＜n = 3 のとき＞

$125X_2 - 8Y_2 = 1$　　$(0<X_2<8$　、$0<Y_2<125)$

$Y_2 = \dfrac{125X_2-1}{8} = 15X_2 + \dfrac{5X_2-1}{8}$ より $X_2 = 5$ 、$Y_2 = 78$　　$A_3 = 5^3\cdot 5 = 625$

$125X'_2 - 8Y'_2 = -1$　　$(0<X'_2<8$　、$0<Y'_2<125)$

$Y'_2 = \dfrac{125X'_2+1}{4} = 15X'_2 + \dfrac{5X'_2+1}{8}$ より $X'_2=3$ 、$Y'_2 = 47$　　$B_3 = 5^3\cdot 3+1 = 376$

＜n = 4 のとき＞

$625X_3 - 16Y_3 = 1$　　$(0<X_3<16$　、$0<Y_3<625)$

$Y_3 = \dfrac{625X_3-1}{16} = 39X_3 + \dfrac{X_3-1}{16}$ より $X_3 = 1$ 、$Y_3 = 39$　　$A_4 = 5^4\cdot 1 = (0625)$

$625X'_3 - 16Y'_3 = -1$　　$(0<X'_3<16$　、$0<Y'_3<625)$

$Y'_3 = \dfrac{625X'_3+1}{16} = 39X'_3 + \dfrac{X'_3+1}{16}$ より $X'_3= 15$、　$Y'_3 = 586$　$B_4 = 5^4\cdot 15+1 = 9376$

＜n = 5 のとき＞

$3125X_4 - 32Y_4 = 1$　　$(0<X_4<32$　、$0<Y_4<3125)$

$Y_4 = \dfrac{3125X_4-1}{32} = 97X_4 + \dfrac{21X_4-1}{32}$　　$21X_4-1 = 32m$、　$X_4 = m + \dfrac{11m+1}{21}$

$11m+1 = 21n$、　$m = n + \dfrac{10n-1}{11}$　　$n = 10$、$m = 10+9 = 19$

より、$X_4 = 29$　、$Y_3 = 2832$　　　$A_5 = 5^5\cdot 29 = 90625$

$3125X'_4 - 32Y'_4 = -1$　　$(0<X'_4<32$　、$0<Y'_4<3125)$

$Y'_4 = \dfrac{3125X_4+1}{32} = 97X_4 + \dfrac{21X_4+1}{32}$　　$21X'_4+1 = 32m$、　$X'_4 = m + \dfrac{11m-1}{21}$

$m = 2$　より、$X'_4 = 3$　、$Y'_4 = 293$　　　$B_5 = 5^5\cdot 3+1 = (09376)$

(参考)

①　$A_n + B_n = 10^n + 1$　を利用すれば、A_n 、B_n のどちらかを計算すれば他も求められる。

②　$5^nX_{n-1} - 2^nY_{n-1} = 1$　より　$5^n(2^n - X_{n-1}) - 2^n(5^n - Y_{n-1}) = -1$　だから

$X'_{n-1} = 2^n - X_{n-1}$ 、$Y'_{n-1} = 5^n - Y_{n-1}$

(例) $n = 5$ のとき $X'_4 = 2^5 - 29 = 32 - 29 = 3$、　$Y'_4 = 5^5 - 2832 = 3125 - 2832 = 293$

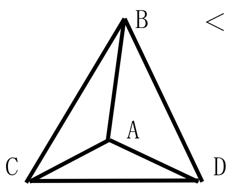
(感想として)

n = 5 については、求めるのに苦労した。なお、本では n = 1 ～ n = 15 までA_n 、B_n の数値が示されている。点検、確認はしていない。どうやって求めたのか不明。電卓では？？

(A_{15} = 259918212890625、B_{15} = 740081787109376) 次のＴｏｐｉｃ での説明を期待したい。

＜最後に＞　次の問題が提示されている。

a、b が正の整数で、互いに素であるとき、 ax − by = 1 (0＜x＜b、0＜y＜a) は、ただ１組の整数解をもつことを証明せよ。



＜ヒマ人のヒマツブシ＞　「凸か凹か？」

(私の感想など) 私には、不思議と凸、凹が瞬時にひっくり返って見えますが、どうですか。

「私と猫」：「私が猫を相手にヒマをつぶしているとき、実は、猫の方が私を相手にヒマをつぶしているのではないか」と考えた。(ﾓﾝﾃﾆｭｰ)

(見取り図)