数学散歩　Ｖ－１２　　　　　　　　　２０１７．２．β　　岐阜市　村山錞司

―　数学教養書の中から　―

「青春の日の数学セミナー　中沢貞治（現代数学社）」（その１２（最終））

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

《飛び入り》　（参考　「その『数式』が信長を殺した　柳谷晃（ベスト新書）」から）

数学には関係ありませんが、書名に魅かれて手にとりました。時代小説で関ケ原の合戦などで、出てくる陣形です。参考にと思い紹介します。

＜戦場の陣形　陣形の基本は「八陣」＞

長蛇（ちょうだ）	雁行（がんこう）	鶴翼（かくよく）	魚鱗（ぎょりん）
方円（ほうえん）	衡軛（こうやく）	鋒矢（ほうし）	偃月（えんげつ）

陣形の図と解説はこの報告の最後にあります。

＜問題と考察など＞

「Ｔｏｐｉｃ　１２　１次・不定方程式」

＜前回、最後に残した問題＞

（整数論関係になるが、本を参考に整理してみた。気になるところは、適宜修正した。また、扱う数はすべて整数であり、本には微妙な表現の異なりがあって解読するのに苦労した。）

〔Ⅰ〕　a、b が１でない正の整数で、互いに素であるとき、
$ax - by = 1$（ $0<x<b$、$0<y<a$ ）は、ただ１組の整数解をもつ。

〔Ⅱ〕　a、b が互いに素であるとき、$ax + by = 1$ は整数解をもつ。
（〔Ⅰ〕で、 $ax - b(-y) = 1$ とすれば〔Ⅱ〕になる。）

＜〔Ⅰ〕の解は $0<x<b$、$0<y<a$ に１組のみ＞

(x_1, y_1)　(x_2, y_2) の２組の解があったとすると、

$\begin{cases} ax_1 - by_1 = 1 \\ ax_2 - by_2 = 1 \end{cases}$ より $a(x_1 - x_2) = b(y_1 - y_2)$、a、b は互いに素だから $x_1 - x_2$ は b の倍数

$0<x_1<b$ 、 $0<x_2<b$ より $-b<x_1 - x_2<b$ ∴ $x_1 - x_2 = 0$　同様に $y_1 - y_2 = 0$

よって、解は１組のみ

＜解の存在－ユークリッドの互除法＞

a、b ($a>b$) が正の整数のとき、この a、b に対して、 $a = qb + r$ （ $0 \leqq r < b$ ）であるような整数 q、r が、ただ１組だけ決まる。

(ｲ)　a、b の最大公約数を $(a,b) = m$ とし、b、r の最大公約数を $(b,r) = n$ とすると、

$a = mt$、$b = ms$、$r = a - qb = m(t - qs)$ ∴ $(b,r) = m(s, t-qs) = n$

$b = nu$、$r = nv$、$a = qb + r = n(qu + v)$ ∴ $(a,b) = n(qu+v, u) = m$

m は n の約数で、倍数だから $m = n$（ m、$n > 0$ ）よって $\underline{(a,b) = (b,r)}$

(ﾛ)　ユークリッドの互除法

① 自然数 a を自然数 b で割って、商が q_1、余りが r_1（ $r_1 \neq 0$ ）なら、

$a = q_1 b + r_1$（ $0 < r_1 < b$ ）　$(a,b) = (b, r_1)$　$r_1 = a - q_1 b$

（注： $a < b$ のとき、$q_1 = 0$、$r_1 = a$ で　、$a = b$ のとき $q_1 = 1$、$r_1 = 0$ ）

② b を r_1 で割って、商が q_2、余りが r_2（ $r_2 \neq 0$ ）なら、

$b = q_2 r_1 + r_2$（ $0 < r_2 < r_1$ ）　$(b, r_1) = (r_1, r_2)$

$r_2 = b - q_2 r_1 = b - q_2(a - q_1 b) = b - q_2(a - q_1 b) = (-q_2)a + (1 + q_1 q_2)b$

③ r_1 を r_2 で割ったとき、商が q_3 で余りが 0 なら、

$r_1 = q_3 r_2$ 、 $(a,b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = r_2(q_3, 1) = r_2 = d$　d は a、b の最大公約数

（②より、$r_2 =$ ）$d = (-q_2)a + (1 + q_1 q_2)b$

このとき $ax + by = d$ には　$x_0 = -q_2$ 、 $y_0 = 1 + q_1 q_2$ の解がある。

(ﾊ)　(ﾛ)で①、② … と続ければ、$a > r_1 > r_2 > \cdots \geqq 0$ いつか $r_n = 0$ となり、③と同様にできる。

＜〔Ⅰ〕の解は制限付き＞

〔Ⅰ〕　a、b が１でない正の整数で、互いに素であるとき、$ax - by = 1$ の１組の解は、$0<x<b$、$0<y<a$ の制限がついている。

(解説)　解を x'、y' とする。$ax' - by' = 1$、 x' を b で割って $x' = nb + x_0$、$0<x_0<b$

$a(nb + x_0) - by' = ax_0 - b(y' - na) = 1$、 $a>1$、$0<1 \leqq x_0<b$ だから

$1<a \leqq ax_0<ab$、 ∴ $0<ax_0 - 1$（ $=b(y' - na)$ ）$<ab - 1<ab$

$y' - na = y_0$ とすると $0 < b\,y_0<ab$ よって $0<y_0<a$

まとめて　$ax_0 - by_0 = 1$ は、 $0<x_0<b$ 、 $0<y_0<a$ の制限つき

＜(ユークリッドの互除法を利用した) Recurrent Numbers を求めるもう１つの方法＞

課題　$5^n X_{n-1} - 2^n Y_{n-1} = 1$　（$0<X_{n-1}<2^n$ 、$0<Y_{n-1}<5^n$）　について
$n = 6$、7、8 の場合の A_n、B_n を求めよ。

（本には、$n = 6$、7 の場合の例があり参考にした。）

（参考） $X_{n-1} = 2^n - X'_{n-1}$ 、 $Y_{n-1} = 5^n - Y'_{n-1}$ 　とすれば　 $5^nX'_{n-1} - 2^nY'_{n-1} = -1$

$A_n = 5^nX_{n-1}$ 、 $B_n = 5^nX'_{n-1} + 1$

＜n = 6＞ $5^6(=15625) = 244 \times 2^6(=64) + 9$

$2^6(=64) = 7 \times \underline{9} + \underline{1}$

$\underline{1} = 2^6(=64) - 7 \times \underline{9} = 2^6 - 7\times(5^6 - 244\times 2^6) = -7\times 5^6 + (7\times 244 + 1)\times 2^6$

∴ $5^6\times 7 - 2^6 \times 1709 = -1$ 　また　$2^6 - 7 = 57$、 $5^6 - 1709 = 13916$ 　より

$5^6\times 57 - 2^6 \times 13916 = 1$

よって $A_6 = 5^6\times 57 = 890625$ 、 $B_6 = 5^6\times 7 + 1 = 109376$

＜n = 7＞ $5^7(=78125) = 610 \times 2^7(=128) + \underline{45}$ 　　$\underline{1} = \underline{7} - 2\times\underline{3}$

$2^7(=128) = 2\times\underline{45} + \underline{38}$ 　　$= \underline{7} - 2\times(\underline{38} - 5\times 7)$

$\underline{45} = 1\times\underline{38} + \underline{7}$ 　　$= -2\times\underline{38} + 11\times\underline{7}$

$\underline{38} = 5\times\underline{7} + \underline{3}$ 　逆に　$= -2\times\underline{38} + 11\times(\underline{45} - 1\times\underline{38})$

$\underline{7} = 2\times\underline{3} + \underline{1}$ 　たどる　$= 11\times\underline{45} - 13\times\underline{38}$

$= 11\times\underline{45} - 13\times(2^7 - 2\times\underline{45}) = 37\times\underline{45} - 13\times 2^7 = 37\times(5^7 - 610\times 2^7) - 13\times 2^7$

∴ $5^7\times 37 - 2^7\times 22583 = 1$ 　また　$2^7 - 37 = 91$、 $5^7 - 22583 = 55542$ 　より

$5^7\times 91 - 2^7\times 55542 = -1$

よって $A_7 = 5^7\times 37 = 2890625$ 、 $B_7 = 5^7\times 91 + 1 = 7109376$

＜n = 8＞ $5^8(=390625) = 1525\times 2^8(=256) + \underline{225}$ 　　$\underline{1} = \underline{8} - 1\times\underline{7}$

$2^8(=256) = 1\times\underline{225} + \underline{31}$ 　　$= \underline{8} - 1\times(\underline{31} - 3\times\underline{8})$

$\underline{225} = 7\times\underline{31} + \underline{8}$ 　　$= -1\times\underline{31} + 4\times\underline{8}$

$\underline{31} = 3\times\underline{8} + \underline{7}$ 　逆に　$= -1\times\underline{31} + 4\times(\underline{225} - 7\times\underline{31})$

$\underline{8} = 1\times\underline{7} + \underline{1}$ 　たどる　$= 4\times\underline{225} - 29\times\underline{31}$

$= 4\times\underline{225} - 29\times(2^8 - 1\times\underline{225}) = 33\times\underline{225} - 29\times 2^8 = 33\times(5^8 - 1525\times 2^8) - 29\times 2^8$

∴ $5^8\times 33 - 2^8\times 50354 = 1$ 　また　$2^8 - 33 = 223$、 $5^8 - 50334 = 340291$ 　より

$5^8\times 223 - 2^8\times 340291 = -1$

よって $A_8 = 5^7\times 33 = 12890625$ 、 $B_7 = 5^8\times 223 + 1 = 87109376$

（不定方程式から少し前の「ラグビーの得点」に話が移る。）

ラグビーの得点の問題　a、b が正の整数で互いに素($a\neq1$、$b\neq1$)であるとき、
$ax + by = c$ 　が $x\geqq 0$、$y\geqq 0$ という解をもつような 0 または正の正数 c を求める。
（ a がトライで b がゴールの得点のときの合計得点）

（本から） $ax - by = 1$、$0<x<b$、$0<y<a$ のただ１組の解を (x_0, y_0) とする。

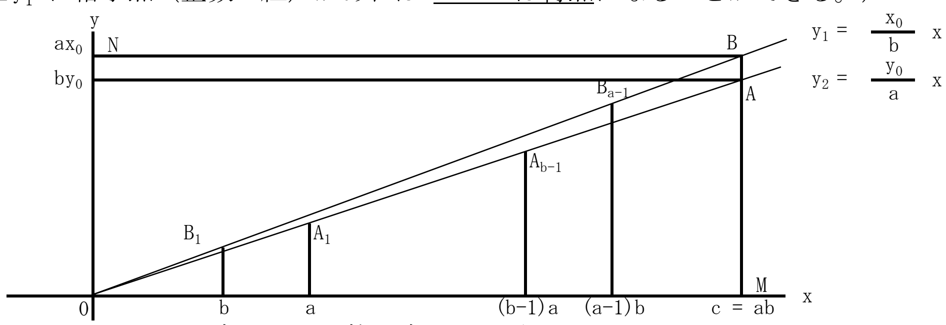
$ax_0 - by_0 = 1$ で $acx_0 - bcy_0 = c$ 　より、 $a(cx_0 - bn) + b(an - cy_0) = c$

$cx_0 - bn \geqq 0$、$an - cy_0 \geqq 0$ より $cx_0 \geqq bn$、$an \geqq cy_0$ 　・・・★

となるような正整数 n が存在するように c が定められれば c は得点になれる。

★より $\frac{y_0}{a}c \leqq n \leqq \frac{x_0}{b}c$ 　　２直線を $y_1 = \frac{y_0}{a}x$ 、 $y_2 = \frac{x_0}{b}x$ とする。

（ $y_2 \leqq y \leqq y_1$ に格子点（整数の組）があれば $\underline{x = c}$ は得点になることができる。）



（図参照） $c = ab$ のとき２点 A、B は格子点。$ax_0 - by_0 = AB = 1$

$c > ab$ のとき２直線の間は１より大だから、格子点（整数の）は１個以上ある。

＜$0 \leqq x\ (=c) < ab$ における△ OAB 内の格子点（点A、B を除く）の数について＞

長方形 OMBN の内部と周上の格子点の数　　$(ab + 1)(ax_0 + 1)$

対角線 OB 上の格子点の数(0、B_1、…、B_{a-1}、B)　　$a + 1$

+) 　（加えると対角線 OB 上の格子点は２重に計算）

△ OMB の内部と周上の格子点の数　　$n_1 = \frac{(ab+1)(ax_0+1) + a + 1}{2}$

同様に △ OMA の内部と周上の格子点の数　　$n_2 = \frac{(ab+1)(by_0+1) + b + 1}{2}$

よって、△ OAB の内部と周上の格子点（点A、B を除く）の数を n とすると、辺 OA 上の格子点を考慮して、 $n = n_1 - n_2 + b - 1 = \frac{(ab+1)(ax_0 - by_0) + a - b}{2} + b - 1$

$= \frac{ab + 1 + a - b + 2b - 2}{2} = \frac{ab + a + b - 1}{2}$ 　（得点になる場合）

ab より小さい c は、0、1、・・・、ab － 1 の ab 通りで、得点になれない場合は、

$$ab - n = \frac{ab - a - b + 1}{2} = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$$ （前の結論と同じ）

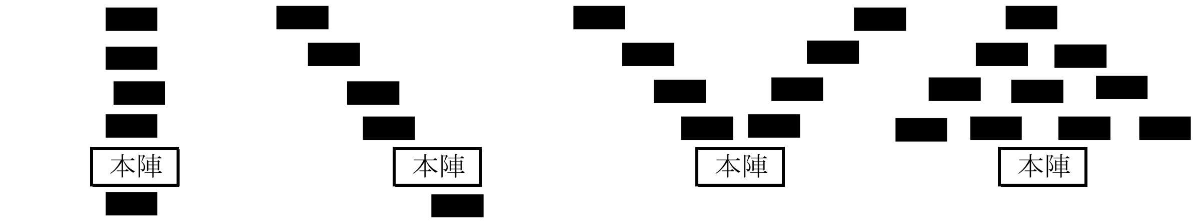
＜最後に残った問題＞

ラグビーの得点になれない数の最大数は、ab －（a ＋ b）

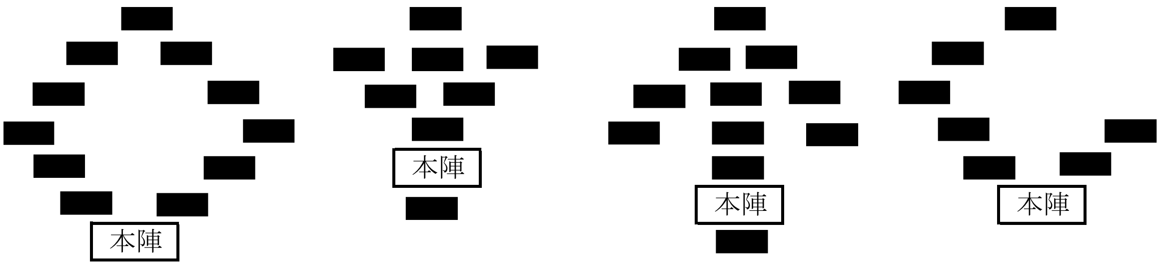
（本によれば）　これも少しの準備で、図から導くことができます。（とあり、しばらく（数日？）挑戦したが、要領を得ず。x ＝ c ＝ ab －（a ＋ b）のとき２直線の間に格子点がない（得点になれない）ことは分かったが、その後いろいろ試みたが不明で中断。何かヒントなどあればよろしく。）

＜戦場の陣形　陣形の基本は「八陣」＞

長蛇（ちょうだ）　雁行（がんこう）　鶴翼（かくよく）　魚鱗（ぎょりん）



方円（ほうえん）　衡軛（こうやく）　鋒矢（ほうし）　偃月（えんげつ）



（本文より（概略））

八つの基本陣形は「諸葛亮八陣」と呼ばれ、中国の三国時代の宰相・諸葛孔明の名前が付いている。

日本で最初の軍師といわれる吉備真備が唐から持ち帰ったものらしい。それぞれの陣形を、自軍と敵軍の多寡を考え、また地形なども考えて使い分けていた。

雁行・長蛇は、直線的に並んでいるので横からの攻撃には弱いが左右にすぐ展開できる。

方円は、平行四辺形または円に近いので、どの方向からの攻撃にも対応できる。（中略）

鋒矢は、敵の中心部に打撃を加える形で、少人数の軍勢で奇襲をするときに使える。

衡軛は、牛車（ぎっしゃ）の横木という意味で、ある程度の大きさの軍勢で迎え撃つ形である。

偃月は、弓を張った形であるから、敵が中心に突撃したときに、中央を後退させて敵を包み込んで戦う。

魚鱗は（中略）中央を厚くし、相手の薄い部分を突破する。鋒矢よりは大軍の兵を持つ時に使える。

鶴翼は、両側から敵を包み込んで戦う。（中略）中央の陣を前へ進めれば、魚鱗になるので変化しやすい陣形でもある。（後略）