数学散歩　Ｖ－2　　　　　　　　　　２０１６．９ β　　岐阜市　村山錞司

―　数学教養書の中から　―

「青春の日の数学セミナー　中沢貞治（現代数学社）」（その２）

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題と考察など＞

「Ｔｏｐｉｃ　１　相加平均と相乗平均」

＜前回紹介した大学入試の問題についての証明など。等号成立については省略した。＞

Ⅳ　　a_1、a_2、・・・、a_n が正数のとき $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$

等号は、 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のときに限る。

＜昔の大学入試問題から＞

問題１　　（秋田大 S 55 ）

⑴　$a \geqq 1$、$0 < b \leqq 1$ ならば　$a + b \geqq 1 + ab$ を証明せよ。

⑵　$a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 1$ である n 個の正数　a_1、a_2、・・・、a_n に対して

不等式　$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqq n$　を数学的帰納法で証明せよ。

⑶　⑵ を用いて、任意の n 個の正数 a_1、a_2、・・・、a_n に対して

$\dfrac{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n}{n} \geqq a_1 a_2 \cdots a_n$ を証明せよ。

（証明）⑴　$a + b - (1 + ab) = -(a - 1)(b - 1) \geqq 0$　より成立

⑵　$n = 1$ のとき $a_1 = 1$ で成立

$n = 2$ のとき $a_1 \cdot a_2 = 1$ より、並べ替えることによって $a_1 \geqq 1$、$0 < a_2 \leqq 1$ とできる。

⑴ より　$a_1 + a_2 \geqq 1 + a_1 \cdot a_2 = 2$　で成立

$n = k$ のとき不等式の成立を仮定する。

$n = k + 1$ のとき　並べ替えることによって $a_1 \geqq 1$、$0 < a_2 \leqq 1$ とできる。

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1} = (a_1 + a_2) + a_3 + \cdots + a_{k+1}$

$\geqq 1 + a_1 \cdot a_2 + a_3 + \cdots + a_{k+1} \geqq 1 + k = k + 1$　$n = k + 1$ のときも成立

（∵　$(a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 \cdots a_{k+1} = 1$ だから仮定より $a_1 \cdot a_2 + a_3 + \cdots + a_{k+1} \geqq k$）

⑶　$b_i = \dfrac{a_i^n}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$　とおくと $b_1 b_2 \cdots b_n = 1$ だから ⑵ より

$b_1 + b_2 + \cdots + b_n \geqq n$　よって問題の不等式を得る。

（ a_i^n を a_i で置き換えれば前記の Ⅳ を得る。）

問題２　　（慶応大 S 44、（類）鹿児島大 S 54 ）

⑴　$x > 0$ のとき $f(x) = \dfrac{a - x}{x} + \log x$　の最小値を求めよ。

⑵　$f_1(x)$、$f_2(x)$、・・・、$f_n(x)$、$\Sigma_{k=1}^{n} f_k(x)$ の最小値を m_1、m_2、・・・、m_n、M

とすれば、　$M \geqq m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ を示せ。

⑶　$a_k > 0$（ $k = 1$、2、・・・、n ）のとき、次の不等式を証明せよ。

$\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$　　（Ⅳ）

（証明）⑴　$f'(x) = (x - a) / x^2$　∴ $x = a$ で最小値 $f(a) = \log a$

⑵　$\Sigma_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) \geqq m_1 + m_2 + \cdots + m_n$

だから、　$M \geqq m_1 + m_2 + \cdots + m_n$

⑶　$f_k(x) = \dfrac{a_k - x}{x} + \log x$ とすると、$\Sigma_{k=1}^{n} f_k(x) = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n - nx}{x} + n \log x$

これを $f(x)$ とおけば、$f'(x) = \{nx - (a_1 + \cdots + a_n)\} / x^2$

それぞれ最小値は、$f_k(a_k) = \log \varepsilon$、$f\{(a_1 + \cdots + a_n) / n\} = n \log\{(a_1 + \cdots + a_n) / n\}$

⑵ から　$n \log\{(a_1 + \cdots + a_n) / n\} \geqq \log a_1 \cdots a_n$　よって不等式（Ⅳ）を得る。

問題３　　（鹿児島大 S 57 ）

$f(x)$ は $a < x < b$ で $f''(x) < 0$ をみたすとき、次を証明せよ。

⑴　$a < c < b$、$a < d < b$、$p \geqq 0$、$q \geqq 0$、$p + q = 1$ のとき

$$f(pc+qd) \geqq p\,f(c)+q\,f(d)$$

(2) $a < c_k < b$ ($k = 1、2、・・・、n$) のとき

$$f\left(\frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{n}\right) \geqq \frac{f(c_1)+f(c_2)+\cdots+f(c_n)}{n}$$

（証明） (1) $c = d$ のとき成立は明らか。$c \leqq d$ とする。（ $c > d$ のときは同様）

$c \leqq pc+qd \leqq d$ 　次に、平均値の定理より

$$\frac{f(pc+qd)-f(c)}{pc+qd-c} = \frac{f(pc+qd)-f(c)}{q(d-c)} = f'(\alpha) \quad (c \leqq \alpha \leqq pc+qd)$$

$$\frac{f(d)-f(pc+qd)}{d-(pc+qd)} = \frac{f(d)-f(pc+qd)}{p(d-c)} = f'(\beta) \quad (pc+qd \leqq \beta \leqq d)$$

ここで、$f''(x) < 0$ だから $f'(x)$ は単調減少(非増加) で、$f'(\alpha) \geqq f'(\beta)$

$$\frac{f(pc+qd)-f(c)}{q(d-c)} \geqq \frac{f(d)-f(pc+qd)}{p(d-c)}$$ 整理して $f(pc+qd) \geqq p\,f(c)+q\,f(d)$

(2) 帰納法による。 $n = 2$ のとき $p = q = 1/2$ とすればよい。

$n = k$ のとき不等式の成立を仮定する。

$n = k+1$ のとき

$$f\left(\frac{c_1+c_2+\cdots+c_{k+1}}{k+1}\right) = f\left(\frac{k}{k+1}\cdot\frac{c_1+c_2+\cdots+c_k}{k}+\frac{c_{k+1}}{k+1}\right)$$

$$\geqq \frac{k}{k+1}f\left(\frac{c_1+c_2+\cdots+c_k}{k}\right)+\frac{1}{k+1}f(c_{k+1})$$

$$\geqq \frac{k}{k+1}\cdot\frac{f(c_1)+f(c_2)+\cdots+f(c_k)}{k}+\frac{1}{k+1}f(c_{k+1})$$

$$= \frac{f(c_1)+f(c_2)+\cdots+f(c_{k+1})}{k+1}$$ $n = k+1$ のときも成立

（参考１） $f(x) = \log x$ とすると $f''(x) = -1/x^2 < 0$

$$\log\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right) \geqq \frac{\log a_1+\log a_2+\cdots+\log a_n}{n}$$

$$\therefore \quad \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

（参考２） $f(x) = x^{1/r}$ ($x > 0、r > 1$) とすると $f''(x) < 0$ だから $c_k = a_k{}^r$ とおけば

$$\left(\frac{a_1{}^r+a_2{}^r+\cdots+a_n{}^r}{n}\right)^{1/r} \geqq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$ r 乗平均 $\geqq$ 相加平均 を得る。

問題４ （横浜大 S ？）

(1) p が正の数で、n が 1 より大きい自然数のとき、$f(x) = x^n - np^{n-1}x$ ($x > 0$) の最小値を求めよ。

(2) (1) の結果において、$x = \sqrt[n]{a_n}$ とおくことにより、次の不等式を証明せよ。ただし、$a_k > 0$ ($k = 1、2、・・・、n$) とする。

$$n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right) \geqq (n-1)\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}-\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}\right)$$

（解） (1) $f'(x) = n(x^{n-1}-p^{n-1})$ 　$x = p$ で最小値 $f(p) = (1-n)p^n$

(2) (1) より、 $x^n - np^{n-1}x \geqq (1-n)p^n$ 　だから、

$x^n - np^{n-1}x + (n-1)p^n \geqq 0$ ($x > 0$)

$x = \sqrt[n]{a_n}$ とおくと、 $a_n - np^{n-1}\sqrt[n]{a_n} + (n-1)p^n \geqq 0$ ($p > 0$)… ①

$$n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right) - (n-1)\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}-\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}\right)$$

$= a_n - n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} + (n-1)\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}$

$= a_n - np^{n-1}\sqrt[n]{a_n} + (n-1)p^n$ 　($p = \sqrt[n(n-1)]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}$)

$\geqq 0$ 　(①より) 　よって不等式は成立

（参考 $S_n = n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right)$ とおくと

$S_1 = a_1 - a_1 = 0$ 、 $S_n \geqq S_{n-1}$ だから

(ｲ) S_n は単調増加 　(ﾛ) $S_n \geqq 0$ 　(ﾊ) Ⅳ 相加平均≧相乗平均 が成立