数学散歩　Ｖ－３　　　　　　　　２０１６．１０．α　　岐阜市　村山錞司

―　数学教養書の中から　―

「青春の日の数学セミナー　中沢貞治（現代数学社）」（その３）

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題と考察など＞

「Ｔｏｐｉｃ　２　整数値をとる多項式」

ラグランジュ（Lagrange）の補間公式（下記）にかかわる事項について紹介

$$y = f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}y_1 + \cdots$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}y_k + \cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}y_n$$

（$x = x_0$、x_1、…、x_n のとき、$y = y_0$、y_1、…、y_n　となる x の n 次式）

「Ｔｏｐｉｃ　３　エジプトの分数」

--- この章においては、問題と考察などを同時並行で対応する。----------------

（本文から）これはエジプトの古い数学書アーメスのパピルスの中にある・・・２つ以上の単位分数（分子が１の分数）の和としてかいた表・・・

（本の表の一部（様式を変えて））n が 5 から 99 までの奇数のとき、

「2 / n を２つ以上の単位分数の和にした表」の一部

$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$　　$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$　　$\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$　　$\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$

$\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{\#\#}$　　$\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$　　$\frac{2}{17} = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$　　・・・

・・・　$\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{\#\#} + \frac{1}{232}$　　・・・　$\frac{2}{99} = \frac{1}{66} + \frac{1}{198}$

課題Ａ　m を正の整数とするとき、$\frac{2}{2m+1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$（x＜y）を満足する正の整数 x、y が少なくとも１組存在する。

（解）$\frac{2}{2m+1} - \frac{1}{m+1} = \frac{1}{(m+1)(2m+1)}$ より $\frac{2}{2m+1} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(2m+1)}$

（参考）　$m = 1$ で $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$　$\times\frac{1}{3}$　とすると表の $\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$

$m = 4$ で $\frac{2}{9} = \frac{1}{5} + \frac{1}{45}$　なお、$\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$　ま「問題外」としている。

この「エジプトの分数」を題材にして、次の課題Ｂのように、２／奇数を２つの単位分数の和にすることについて考察している。なお、表の２／１３のような３つ以上の単位分数の和にすることについては、（本では、「君が興味を持ったとき、参考文献を紹介する」として）扱っていない。

課題Ｂ　$\frac{2}{15} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$（x＜y）を満足する正の整数解の組　$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$　をすべて求めよ。

（解）$2xy = 15(x+y)$（×2）より、$4xy = 30(x+y)$ だから　$(2x - 15)(2y - 15) = 15^2$

$2x - 15 = a$、$2y - 15 = b$ とすると、$a\cdot b = 3^2\cdot 5^2$　$x = (15+a)/2$、$y = (15+b)/2$

x＜y で a＜b だから、$(a,b) = (1, 3^2\cdot 5^2)$、$(3, 3\cdot 5^2)$、$(5, 3^2\cdot 5)$、$(3^2, 5^2)$

$(x,y) = (8,120)$、$(9,45)$、$(10,30)$、$(12,20)$ となり、

$\frac{2}{15} = \frac{1}{8} + \frac{1}{120}$、$\frac{1}{9} + \frac{1}{45}$、$\frac{1}{10} + \frac{1}{30}$、$\frac{1}{12} + \frac{1}{20}$　の４組ある。

課題Ｃ　n が奇数のとき、$\frac{2}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$（0＜x＜y）を満足する整数解を求めよ。

（解）課題Ｂと同様、$4xy - 2nx - 2ny + n^2 = n^2$ より、　$(2x - n)(2y - n) = n^2$

$n^2 = a\cdot b$　となる２つの奇数 a、b（0＜a＜b）をとって $2x - n = a$、$2y - n = b$

$x = \frac{n+a}{2}$、$y = \frac{n+b}{2}$　で　$\frac{2}{n} = \frac{1}{(n+a)/2} + \frac{1}{(n+b)/2}$

n^2 の約数の個数を N とすれば、N 組の解があるが、a＜b により $(N - 1)/2$ 組の解になる。

課題Ｄ　$5 \leqq n \leqq 99$ の奇数 n は、p、q を(2 以外の)異なる奇数として、p、p^2、p^3、p^4、pq、p^2q

のいずれかの形になり、$n^2 = a \cdot b$ となる (a, b) $(0<a<b)$ の組の数は次表になる。

n の形	p	p^2	p^3	p^4	pq	p^2q
(a, b) の組の数	1	2	3	4	4	7

（解）　…、$9 = 3^2$、…、$15 = 3 \cdot 5$、…、$27 = 3^3$、…、$45 = 3^2 \cdot 5$、…、$81 = 3^4$、…、$99 = 3^2 \cdot 11$

$a<b$ に注意して、

(ｲ) $n = p$	$n^2=p^2=1\times p^2$	$(1, p^2)$	1通り
(ﾛ) $n = p^2$	$n^2=p^4=1\times p^4=p\times p^3$	$(1, p^2), (p, p^3)$	2通り
(ﾊ) $n = p^3$	$n^2=1\times p^6=p\times p^5=p^2\times p^4$	$(1, p^6), (p, p^5), (p^2, p^4)$	3通り
(ﾆ) $n = p^4$	$n^2=1\times p^8=p\times p^7=p^2\times p^6=p^3\times p^5$	$(1, p^8), (p, p^7), (p^2, p^6), (p^3, p^5)$	4通り
(ﾎ) $n = pq$	$n^2=1\times p^2q^2=p\times pq^2=q\times p^2q=p^2\times q^2$	$(1, p^2q^2), (p, pq^2), (q, p^2q), (p^2, q^2)$	4通り
(ﾍ) $n = p^2q$	$n^2=1\times p^4q^2$	$(1, p^4q^2), (p, p^3q^2), (p^2, , p^2q^2), (p^3, pq^2$ $(p^4, q^2), (q, p^4q), (pq, , p^3q)$	7通り

（並びの関係から、逆の $a>b$ もあり）

＜固有解と非固有解＞

$\frac{2}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ $(0<x<y)$ の解で、n、x、y の間に１以外の公約数がない(a、b が互いに素
とき固有解、そうでないとき非固有解という。

問題　次の分数の固有解と非固有解を求めよ。　(1) $\frac{2}{21}$　(2) $\frac{2}{45}$　(3) $\frac{2}{81}$

（解）(1)　$n = 21 = 3\times 7$　$n^2 = 3^2\times 7^2 = 441$　$(1, 441)$、$(9, 49)$

固有解　$\frac{2}{21+1} + \frac{2}{21+441} = \underline{\frac{1}{11} + \frac{1}{231}}$、$\frac{2}{21+9} + \frac{2}{21+49} = \underline{\frac{1}{15} + \frac{1}{35}}$

非固有解　$\frac{2}{21} = \frac{1}{3}\times\frac{2}{7}$、$\frac{1}{7}\times\frac{2}{3}$

$\frac{1}{3}\times\frac{2}{7}$　$n = 7$、$n^2 = 1\times 7^2 = 49$、$(1, 49)$　$\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{7+1} + \frac{2}{7+49}\right) = \underline{\frac{1}{12} + \frac{1}{84}}$

$\frac{1}{7}\times\frac{2}{3}$　$n = 3$、$n^2 = 1\times 3^2 = 9$、$(1, 9)$　$\frac{1}{7}\times\left(\frac{2}{3+1} + \frac{2}{3+9}\right) = \underline{\frac{1}{14} + \frac{1}{42}}$

(2)　$n = 45 = 3^2\times 5$　$n^2 = 3^4\times 5^2 = 2025$　$(1, 2025)$、$(25, 81)$

固有解　$\frac{2}{45+1} + \frac{2}{45+2025} = \underline{\frac{1}{23} + \frac{1}{1035}}$、$\frac{2}{45+25} + \frac{2}{45+81} = \underline{\frac{1}{35} + \frac{1}{63}}$

非固有解　$\frac{2}{45} = \frac{1}{15}\times\frac{2}{3}$、$\frac{1}{5}\times\frac{2}{9}$、$\frac{1}{9}\times\frac{2}{5}$、$\frac{1}{3}\times\frac{2}{15}$

$\frac{1}{15}\times\frac{2}{3}$　$n = 3$、$n^2 = 1\times 3^2 = 9$、$(1, 9)$　$\frac{1}{15}\times\left(\frac{2}{3+1} + \frac{2}{3+9}\right) = \underline{\frac{1}{30} + \frac{1}{90}}$

$\frac{1}{5}\times\frac{2}{9}$　$n = 9$、$n^2 = 1\times 9^2 = 81$、$(1, 81)$　$\frac{1}{5}\times\left(\frac{2}{9+1} + \frac{2}{9+81}\right) = \underline{\frac{1}{25} + \frac{1}{225}}$

$\frac{1}{9}\times\frac{2}{5}$　$n = 5$、$n^2 = 1\times 5^2 = 25$、$(1, 25)$　$\frac{1}{9}\times\left(\frac{2}{5+1} + \frac{2}{5+25}\right) = \underline{\frac{1}{27} + \frac{1}{135}}$

$\frac{1}{3}\times\frac{2}{15}$　$n = 15$、$n^2 = 3^2\times 5^2 = 225$、$(1, 225)$、$(9, 25)$

$\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{15+1} + \frac{2}{15+225}\right) = \underline{\frac{1}{24} + \frac{1}{360}}$、$\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{15+9} + \frac{2}{15+25}\right) = \underline{\frac{1}{36} + \frac{1}{60}}$

(3)　$n = 81 = 3^4$　$n^2 = 3^8 = 6561$　$(1, 6561)$

固有解　$\frac{2}{81+1} + \frac{2}{81+6561} = \underline{\frac{1}{41} + \frac{1}{3321}}$

非固有解　$\frac{2}{81} = \frac{1}{27}\times\frac{2}{3}$、$\frac{1}{9}\times\frac{2}{9}$、$\frac{1}{3}\times\frac{2}{27}$

$\frac{1}{27}\times\frac{2}{3}$　$n = 3$、$n^2 = 1\times 3^2 = 9$、$(1, 9)$　$\frac{1}{27}\times\left(\frac{2}{3+1} + \frac{2}{3+9}\right) = \underline{\frac{1}{54} + \frac{1}{162}}$

$\frac{1}{9}\times\frac{2}{9}$　$n = 9$、$n^2 = 1\times 9^2 = 81$、$(1, 81)$　$\frac{1}{9}\times\left(\frac{2}{9+1} + \frac{2}{9+81}\right) = \underline{\frac{1}{45} + \frac{1}{405}}$

$\frac{1}{3}\times\frac{2}{27}$　$n = 5$、$n^2 = 1\times 27^2 = 729$、$(1, 729)$　$\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{27+1} + \frac{2}{27+729}\right) = \underline{\frac{1}{42} + \frac{1}{1134}}$