

-----<問題と考察など>-----

「T o p i c 4 ピタゴラスの数」

（「ピタゴラスの数」（数学小辞典）：直角三角形の3辺の長さとなりうる三つの整数の組をいう。

…一般に、 m, n ($m > n > 0$) を整数とすると $m^2 - n^2$ 、 $2mn$ 、 $m^2 + n^2$ で与えられる三つの数)

(A) n が奇数のとき、 $\frac{2}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ($x < y$) を満足する正の整数 x, y を求めよ。

(解) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{2}{n}$ だから $\begin{cases} x+y = 2k \\ xy = nk \end{cases}$ (k は正の整数) とおける。

x, y は $t^2 - 2kt + nk = 0$ の2根

$t = k \pm \sqrt{k^2 - nk}$ t は整数だから、 $k^2 - nk = h^2$ (h は正の整数)

$k^2 - nk - h^2 = 0$ より、 $k = \frac{n \pm \sqrt{n^2 + 4h^2}}{2}$ ($\pm$ は $k > 0$ より + のみ)

k は整数だから、 $n^2 + 4h^2 = m^2$ ($n, 2h, m$ はピタゴラスの数になる。)

(B) n が奇数のとき、 $n^2 + (2h)^2 = m^2$ を満足する正の整数 h, m を求めよ。

(A) から (B) がでてきたが、(A) は解決済みだから、(B) も解ける。

<(A) について整理> 前回の「T o p i c 3 エジプトの分数」から

$n = \frac{ab}{a^2 + b^2}$ (a, b は互いに素) とすると $n^2 = \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2}$ ($(1, a^2 b^2), (a^2, b^2)$)

より次の固有解 (n, x, y が共役数をもたない) が得られ、 n の約数による非固有解も得られる。

$x = \frac{ab+a^2}{2} = \frac{a(a+b)}{2}$ 、 $y = \frac{ab+b^2}{2} = \frac{b(a+b)}{2}$ 本に $(1, a^2 b^2)$ についてはない。
 $((a^2, b^2)$ で代替?)

$x+y = \frac{(a+b)^2}{2} = 2k$ 、 $xy = \frac{ab(a+b)^2}{4} = abk$ より、どちらからでも $k = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$h^2 = k^2 - nk = \left(\frac{a+b}{2}\right)^4 - ab \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{4}\right)^2$

$m^2 = n^2 + 4h^2 = (ab)^2 + \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 \dots (\alpha)$ が得られる。

<固有解と非固有解>

(B) の $n^2 + (2h)^2 = m^2$ で、 $n, 2h, m$ の間に1以外の公約数のない解を固有解、そうでない解を非固有解という。

(A) の固有解から (B) の固有解が出る。

a, b が互いに素 ((A) の固有解のとき) なら ab 、 $(a^2 - b^2)/2$ 、 $(a^2 + b^2)/2$ の3つは1以外に公約数をもたないことを示せばよい。

$(a^2 - b^2)/2$ と $(a^2 + b^2)/2$ に公約数 c があるとすると、

$(a^2 - b^2)/2 = cu$ 、 $(a^2 + b^2)/2 = cv$ (u, v はともに整数)

$a^2 = c(u+v)$ 、 $b^2 = c(v-u)$ c は a^2 、 b^2 の公約数となり、 $c = 1$ で不可。

(A) の非固有解から (B) の非固有解が出る。(証明等は略)

(例) $n = 15 = 3 \times 5$ ($a > b$ として) $(a, b) = (15, 1), (5, 3)$

固有解 $15^2 + \left(\frac{15^2 - 1^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{15^2 + 1^2}{2}\right)^2$ $15^2 + \left(\frac{5^2 - 3^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{5^2 + 3^2}{2}\right)^2$

より、 $15^2 + 112^2 = 113^2$ より、 $15^2 + 8^2 = 17^2$

非固有解 $(a, b) = (5, 1) \times 3$ $(3, 1) \times 5$
 $5^2 + 12^2 = 13^2$ ($\times 3$) $3^2 + 4^2 = 5^2$ ($\times 5$)

より、 $15^2 + 36^2 = 39^2$ より、 $15^2 + 20^2 = 25^2$

問 (B) の解 $(ab)^2 + \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 \dots (\alpha)$ の分母を払うと

$(2ab)^2 + (a^2 - b^2)^2 = (a^2 + b^2)^2 \dots (\beta)$

が得られるが、 $n = 2ab$ とすると奇数でなくなり困った。どうすればよいのか。

冒頭でふれたように、(β) の左辺をを代入替えて $(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 \dots (\beta)$

が一般に「ピタゴラスの数」といわれる。

(解) $n = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = u \cdot v$ ($u > v > 0$) とすればよい。

$$a + b = u, \quad a - b = v \quad \cdots (1) \quad n \text{ が奇数であれば、} u, v \text{ ともに奇数で、}$$

$$a = \frac{u+v}{2}, \quad b = \frac{u-v}{2} \quad \cdots (2) \quad (2) \text{ より、}$$

a, b は整数になる。

◎ a, b が互いに素 $\Leftrightarrow u, v$ が互いに素

($\because$ 対偶 a, b に公約数あり $\Leftrightarrow u, v$ に公約数あり)

(本から) $\cdots$ すると、 $n^2 + (2h)^2 = m^2$ の解は

$$n = u \cdot v = (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$2h = \frac{u^2 - v^2}{2} = \frac{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2}{2} = 2ab$$

$$m = \frac{u^2 + v^2}{2} = \frac{(a^2 + b^2)^2 + (a^2 - b^2)^2}{2} = a^2 + b^2$$

で、これから $(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2$ となります。 $\cdots$

(私の個人的感想) 2重下線の部分が突然出てきてビックリ!! (本当は逆じゃないか?)

頭が固くなったせいか、サッパリ理解できない。次は私なりの解釈です。

(2)を(β)に代入して左辺の2項を入れ替えれば、

$$(uv)^2 + \left(\frac{u^2 - v^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right)^2 \quad \text{と} \quad (\alpha) \text{ と同様の式が得られる。}$$

(例) $n = 21$ のとき

(本の答 (原文のまま))

固有解

$$21 = 5^2 - 2^2 \quad \text{から} \quad a = 5, b = 2 \text{ で、} \quad 21^2 + 20^2 = 29^2$$

$$21 = 11^2 - 10^2 \quad \text{から} \quad a = 11, b = 10 \text{ で、} \quad 21^2 + 220^2 = 221^2$$

非固有解

$$3 = 2^2 - 1^2 \quad \text{から} \quad a = 3, b = 1 \text{ で、} \quad 21^2 + 28^2 = 35^2$$

$$7 = 4^2 - 3^2 \quad \text{から} \quad a = 4, b = 3 \text{ で、} \quad 21^2 + 72^2 = 75^2$$

(前に記したことと同様、この答がよく理解できなかった。次は私の答です。)

((β) のやり方で)

固有解

$$n = 21 = u \cdot v = (a+b)(a-b) \quad (u > v > 0) \quad (u, v) = (21, 1), (7, 3)$$

$$u = a + b = 21, \quad v = a - b = 1 \quad \text{で} \quad (a, b) = (11, 10) \quad n = 21 = \frac{11^2 - 10^2}{2}$$

$$(11^2 - 10^2)^2 + (2 \cdot 11 \cdot 10)^2 = (11^2 + 10^2)^2 \rightarrow 21^2 + 220^2 = 221^2$$

$$u = a + b = 7, \quad v = a - b = 3 \quad \text{で} \quad (a, b) = (5, 2) \quad n = \frac{5^2 - 2^2}{2}$$

$$(5^2 - 2^2)^2 + (2 \cdot 5 \cdot 2)^2 = (5^2 + 2^2)^2 \rightarrow 21^2 + 20^2 = 29^2$$

非固有解

$$n = 21 = 7 \cdot 3 = 7 \cdot n', \quad n' = 3 = u \cdot v = (a+b)(a-b), \quad (u, v) = (3, 1)$$

$$u = a + b = 3, \quad v = a - b = 1 \quad \text{で} \quad (a, b) = (2, 1) \quad n' = \frac{3^2 - 1^2}{2}$$

$$(2^2 - 1^2)^2 + (2 \cdot 2 \cdot 1)^2 = (2^2 + 1^2)^2 \quad 3^2 + 4^2 = 5^2 \quad (\times 3) \rightarrow 21^2 + 28^2 = 35^2$$

$$n = 21 = 3 \cdot 7 = 3 \cdot n', \quad n' = 7 = u \cdot v = (a+b)(a-b), \quad (u, v) = (7, 1)$$

$$u = a + b = 7, \quad v = a - b = 1 \quad \text{で} \quad (a, b) = (4, 3) \quad n' = \frac{7^2 - 1^2}{2}$$

$$(4^2 - 3^2)^2 + (2 \cdot 4 \cdot 3)^2 = (4^2 + 3^2)^2 \quad 7^2 + 24^2 = 25^2 \quad (\times 3) \rightarrow 21^2 + 72^2 = 75^2$$

(参考) (α) のやり方で $n = 21 = 7 \times 3$ ($a > b$ として) $(a, b) = (21, 1), (7, 3)$

固有解

$$21^2 + \left(\frac{21^2 - 1^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{21^2 + 1^2}{2}\right)^2 \quad 21^2 + \left(\frac{7^2 - 3^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{7^2 + 3^2}{2}\right)^2$$

$$\text{より、} \quad 21^2 + 220^2 = 221^2$$

$$\text{より、} \quad 21^2 + 20^2 = 29^2$$

非固有解

$$n = 7 \cdot 3 = 7n', \quad n' = 3 \cdot 1$$

$$n = 3 \cdot 7 = 3n', \quad n' = 7 \cdot 1$$

$$(a, b) = (3, 1)$$

$$(a, b) = (7, 1)$$

$$3^2 + \left(\frac{3^2 - 1^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{3^2 + 1^2}{2}\right)^2$$

$$7^2 + \left(\frac{7^2 - 1^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{7^2 + 1^2}{2}\right)^2$$

$$\text{より、} \quad 3^2 + 4^2 = 5^2 \quad (\times 7)$$

$$\text{より、} \quad 7^2 + 24^2 = 25^2 \quad (\times 3)$$

$$\rightarrow 21^2 + 28^2 = 35^2$$

$$\rightarrow 21^2 + 72^2 = 75^2$$