数学散歩　Ｖ－５　　　　　　　　２０１６．１１．$\alpha$　　岐阜市　村山錞司

―　数学教養書の中から　―

「青春の日の数学セミナー　中沢貞治（現代数学社）」（その５）

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題と考察など＞

「Ｔｏｐｉｃ　５　再び整数値をとる多項式」

f(x)： x の多項式　　本では「m を任意の整数とする」としているが、式の変形によるのみであるため、この報告では何も限定しないで対応する。

第１階差　：　$\Delta f(m) = f(m+1) - f(m)$、　$\Delta f(m+1) = f(m+2) - f(m+1)$

第２階差　：　$\Delta^2 f(m) = \Delta f(m+1) - \Delta f(m) = f(m+2) - 2f(m+1) + f(m)$

$\Delta^2 f(m+1) = f(m+3) - 2f(m+2) + f(m+1)$

第３階差　：　$\Delta^3 f(m) = \Delta^2 f(m+1) - \Delta^2 f(m) = f(m+3) - 3f(m+2) + 3f(m+1) - f(m)$

・・・　一般に

第ｎ階差　：　$\Delta^n f(m) = {}_nC_0 f(m+n) - {}_nC_1 f(m+n-1) + \cdots + (-1)^k {}_nC_k f(m+n-k) + \cdots$

$+ (-1)^{n-1} {}_nC_{n-1} f(m+1) + (-1)^n {}_nC_n f(m) = \Sigma_{k=0}^{n} (-1)^k {}_nC_k f(m+n-k)$　…($\alpha$)

と予想される。

課題Ｉ　$\Delta^{n+1} f(m) = \Delta^n f(m+1) - \Delta^n f(m)$ を計算し、帰納法により($\alpha$)の正しいことを示せ。

（証明）　$\Delta^n f(m+1) = {}_nC_0 f(m+n+1) - {}_nC_1 f(m+n) + \cdots + (-1)^k {}_nC_k f(m+1+n-k)$

$+ (-1)^{k+1} {}_nC_{k+1} f(m+n-k) + \cdots + (-1)^{n+1} {}_nC_{n-1} f(m+2) + (-1)^n {}_nC_n f(m+1)$

（ ${}_nC_{k+1} + {}_nC_k = {}_{n+1}C_{k+1}$ を利用して）

$\Delta^{n+1} f(m) = {}_nC_0 f(m+n+1) - ({}_nC_1 + {}_nC_0) fm+n) + \cdots + (-1)^{k+1} ({}_nC_{k+1} + {}_nC_k) f(m+n-k) + \cdots$

$- (-1)^n {}_nC_n f(m)$

$= {}_{n+1}C_0 f(m+n+1) - {}_{n+1}C_1 f(m+n) + \cdots + (-1)^{k+1} {}_{n+1}C_{k+1} f(m+n-k) + \cdots$

$+ (-1)^{n+1} {}_{n+1}C_{n+1} f(m) = \Sigma_{k=0}^{n+1} (-1)^k {}_{n+1}C_k f(m+\underline{n+1}-k)$　…($\beta$)

第１階差、第２階差で、n ＝ １、２ のとき成立し、帰納法により($\alpha$)は成立する。

課題２　　f(x) が n 次多項式のとき、次を示せ。

⑴　　$\Delta^{n+1} f(x) = 0$

⑵　　f(0)、f(1)、・・・、f(n) が整数のとき、任意の整数 m に対して f(m) は整数になる。

（次は本の内容と異なり、私個人の勝手な考えによるものである。）

⑴　　$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$　　とおく。

$f(x+1) = a_0 (x+1)^n + a_1 (x+1)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x+1) + a_n$

$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = n \cdot a_0 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}$　で、n-1 次式になり、次数が１下がり、

１つ階差をとれば、次数が１下がることになる。

$\Delta^2 f(x)$は n-2 次式、$\Delta^3 f(x)$は n-3 次式、・・・ $\Delta^n f(x)$は定数となり、　$\Delta^{n+1} f(x) = 0$

（本の記述では）f(x) が x の n 次式のとき、任意の整数 m について <u>$\Delta^{n+1} f(m) = 0$ であることが証明されたとする</u>。（妙な感じがする。３ページほど後に上記⑴と同様の内容あり。）

⑵　　⑴と課題１の($\beta$)より、 $\Delta^{n+1} f(m) = \Sigma_{k=0}^{n+1} (-1)^k {}_{n+1}C_k f(m+n+1-k) = 0$　　…($\gamma$)

k ＝ 0 のみ残して移項すると

$f(m+n+1) = \Sigma_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} {}_{n+1}C_k f(m+n+1-k)$

$= {}_{n+1}C_1 fm+n) - {}_{n+1}C_2 f(m+n-1) + \cdots + (-1)^{n-1} {}_{n+1}C_n f(m+1) + (-1)^n {}_{n+1}C_{n+1} f(m)$

m ＝ 0 として、

$f(n+1) = {}_{n+1}C_1 f(n) - {}_{n+1}C_2 f(n-1) + \cdots + (-1)^{n-1} {}_{n+1}C_n f(1) + (-1)^n {}_{n+1}C_{n+1} f(0)$

f(0)、f(1)、・・・、f(n) が整数のとき、f(n+1)、f(n+2)、・・・と整数になる。

($\gamma$)で k ＝ n ＋ １ のみ別にすると　$\Sigma_{k=0}^{n} (-1)^k {}_{n+1}C_k f(m+n+1-k) + (-1)^{n+1} f(m) = 0$

k を n-k でおきかえて　　　　$\Sigma_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} {}_{n+1}C_{n-k} f(m+k+1) + (-1)^{n+1} f(m) = 0$

$(-1)^n$　（$(-1)^{-k} = (-1)^k$）で割って移項すると

$f(m) = \Sigma_{k=0}^{n} (-1)^k {}_{n+1}C_{n-k} f(m+k+1)$　　　…($\delta$)

($\delta$)で m ＝ -1 として

$f(-1) = \Sigma_{k=0}^{n} (-1)^k {}_{n+1}C_{n-k} f(k) = {}_{n+1}C_n f(0) - {}_{n+1}C_{n-1} f(1) + \cdots + (-1)^n {}_{n+1}C_0 f(n)$

以下、f(-2)、f(-3)、・・・と整数になり、

任意の整数 m に対して f(m) は整数になる。

（例）（Ｎｅｗｔｏｎの公式の準備として）３次式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ について

$f(x+1) = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$

$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = 3ax^2 + (3a+2b)x + a+b+c$

$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x) = 6ax + 6a+2b$

$\Delta^3 f(x) = \Delta^2 f(x+1) - \Delta^2 f(x) = 6a$

だから　$f(0) = d$、$\Delta f(0) = a+b+c$、$\Delta^2 f(0) = 6a+2b = 2(3a+b)$、$\Delta^3 f(0) = 6a$

$$f(x) = ax\{(x-1)(x-2)+3(x-1)+1\} + bx\{(x-1)+1\} + cx + d$$

$$= ax(x-1)(x-2) + (3a+b)x(x-1) + (a+b+c)x + d$$

$$= 6a\frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + 2(3a+b)\frac{x(x-1)}{2!} + (a+b+c)x + d$$

$$= \Delta^3 f(0)\frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \Delta^2 f(0)\frac{x(x-1)}{2!} + \Delta f(0)x + f(0)$$

（本によると）これらから、次が予想される。

＜Ｎｅｗｔｏｎの公式＞

$$f(x) = \Delta^n f(0)\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{n!} + \Delta^{n-1} f(0)\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+2)}{(n-1)!} + \cdots$$

$$+ \Delta^k f(0)\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!} + \cdots + \Delta f(0)x + f(0) \qquad \cdots (☆)$$

（本の記述から）もし(☆)が正しければ、$f(0)$、$f(1)$、…、$f(n)$ が整数ならば、
$\Delta^n f(0)$、$\Delta^{n-1} f(0)$、…、$\Delta f(0)$、$f(0)$ は全部整数、また、$\{x(x-1)\cdots(x-k+1)\}/k!$ は
$x$ が整数のときつねに整数ですから、もう一度（課題２）の証明ができたことになります。
(☆)の証明は家に帰ってから考えてみます。

（下線部分について）あっさり書かれているが、確認してみた。

$x = 0$、1、…、$n$ を代入して、 $f(0)=f(0)$、$f(1)=\Delta f(0)+f(0)$、…、$f(n)=\Delta^n f(0)+\cdots+f(0)$

だから $f(0)$、$f(1)$、…、$f(n)$ が整数ならば（逆の順に）

$f(0)$、$\Delta f(0)$、$\Delta^2 f(0)$、…、$\Delta^n f(0)$ は全部整数

（二重下線部分について）　（何故か、後にも先にも証明の記載はない。）

（証明をいろいろ方法など変えて試みたができそうでできず、何度もあきらめかけたが、何とか次のように証明ができたように思う。点検をお願いしたい。）

課題３　（公式(☆)の証明の方針）

$f(x)$ を $x$ の $n$ 次式とすると、

$$f(x) = a_n\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{n!} + a_{n-1}\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+2)}{(n-1)!} + \cdots$$

$$+ a_k\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!} + \cdots + a_2\frac{x(x-1)}{2!} + a_1 x + a_0$$ とおける。

$\Delta^k f(0) = a_k$ の成立を示す。

（証明）　$x = 0$、1、2 、… を代入して　$f(0) = a_0$、　$f(1) = a_1 + a_0$、 $f(2) = a_2 + 2a_1 + a_0$、

・・・・・・

$k$ を正の整数($k \leqq n$)とすると、

$$f(k) = a_k + a_{k-1}k + \cdots + a_{k-\ell}\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(\ell+1)}{(k-\ell)!} + \cdots + a_2\frac{k(k-1)}{2!} + a_1 k + a_0$$

$$= {}_kC_0\, a_k + {}_kC_1\, a_{k-1} + \cdots + {}_kC_\ell\, a_{k-\ell} + \cdots + {}_kC_{k-2}\, a_2 + {}_kC_{k-1}\, a_1 + {}_kC_k\, a_0$$

$$f(k-\ell) = {}_{k-\ell}C_0\, a_{k-\ell} + {}_{k-\ell}C_1\, a_{k-\ell-1} + \cdots + {}_{k-\ell}C_{k-\ell}\, a_0$$

$((\alpha)$から$)$　$\Delta^n f(m) = {}_nC_0 f(m+n) - {}_nC_1 f(m+n-1) + \cdots + (-1)^k {}_nC_k f(m+n-k) + \cdots$
$+ (-1)^{n-1}{}_nC_{n-1} f(m+1) + (-1)^n {}_nC_n f(m)$　より $n = k$、$m = 0$ として、

$$\Delta^k f(0) = {}_kC_0 f(k) - {}_kC_1 f(k-1) + \cdots + (-1)^\ell {}_kC_\ell f(k-\ell) + \cdots + (-1)^{k-1}{}_kC_{k-1} f(1) + (-1)^k {}_kC_k f(0)$$

$$= {}_kC_0\{{}_kC_0\, a_k + {}_kC_1\, a_{k-1} + \cdots + {}_kC_\ell\, a_{k-\ell} + \cdots + {}_kC_{k-2}\, a_2 + {}_kC_{k-1}\, a_1 + {}_kC_k\, a_0\}$$
$$- {}_kC_1\{{}_{k-1}C_0\, a_{k-1} + {}_{k-1}C_1\, a_{k-2} + \cdots + {}_{k-1}C_{\ell-1}\, a_{k-\ell} + \cdots + {}_{k-1}C_{k-2}\, a_1 + {}_{k-1}C_{k-1}\, a_0\}$$
$$+ (-1)^\ell {}_kC_\ell\{{}_{k-\ell}C_0\, a_{k-\ell} + {}_{k-\ell}C_1\, a_{k-\ell-1} + \cdots + {}_{k-\ell}C_{k-\ell}\, a_0\} + \cdots$$
$$+ (-1)^{k-1}{}_kC_{k-1}(a_1 + a_0) + (-1)^k {}_kC_k a_0$$

$$= a_k + (k-k)a_{k-1} + \cdots + ({}_kC_0\,{}_kC_\ell - {}_kC_1\,{}_{k-1}C_{\ell-1} + \cdots + (-1)^\ell {}_kC_\ell\,{}_{k-\ell}C_0)\, a_{k-\ell}$$
$$+ \cdots + ({}_kC_0\,{}_kC_k - {}_kC_1\,{}_{k-1}C_{k-1} + \cdots + (-1)^k {}_kC_k)a_0$$

$$\left[\ {}_kC_t\ {}_{k-t}C_{\ell-t} = \frac{k!}{t!(k-t)!}\cdot\frac{(k-t)!}{(\ell-t)!(k-\ell)!} = \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!}\cdot\frac{\ell!}{t!(\ell-t)!} = {}_kC_\ell\ {}_\ell C_t \quad (t = 0、1、2、・・・、\ell)\ \right]$$

$$= a_k + 0\cdot a_{k-1} + \cdots + {}_kC_\ell({}_\ell C_0 - {}_\ell C_1 + \cdots + (-1)^\ell {}_\ell C_\ell)a_{k-\ell}$$
$$+ \cdots + ({}_kC_0 - {}_kC_1 + \cdots + (-1)^k {}_kC_k)a_0$$

$$= a_k + \cdots + {}_kC_\ell\cdot(1-1)^\ell a_{k-\ell} + \cdots + (1-1)^k\cdot a_0 = a_k$$