数学散歩　Ｖ－７　　　　　　２０１６．１２．α　　岐阜市　村山錞司

―　数学教養書の中から　―

「青春の日の数学セミナー　中沢貞治（現代数学社）」（その７）

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜気になった話＞

龍の爪は何本？　３本、５本？

（答はこの報告の最後にあります。）

＜問題と考察など＞

「Ｔｏｐｉｃ　７　ラグビーの得点」

ラグビーの試合で、得点になりうる数と、なれない数などを考察する。

(A)　トライで３点、ゴールで５点とすると　（本当はいろいろで違っているそうだ。）

$P = 3x + 5y$、x、y は整数で　$x \geqq 0$、$y \geqq 0$　・・・　(1)

＜P の表＞

x＼y	0	1	2	3	4	5	6	----
0	0	5	10	15	20	25	30	----
1	3	8	13	18	23	28	33	----
2	6	11	16	21	26	31	36	----
3	9	14	19	24	29	34	39	----
4	12	17	22	27	32	37	42	----
5	15	20	25	30	35	40	45	----

・・・・・・・・・

得点になれない数は
1,2,4,7　の４個で　最大数は 7
8 以上はすべてある。

(B)　トライで４点、ゴールで７点とすると

$P' = 4x' + 7y'$、x'、y' は整数で　$x' \geqq 0$、$y' \geqq 0$　・・・　(2)

＜P’の表＞

x’＼y’	0	1	2	3	4	5	6	----
0	0	7	14	21	28	35	42	----
1	4	11	18	25	32	39	46	----
2	8	15	22	29	36	43	50	----
3	12	19	26	33	40	47	54	----
4	16	23	30	37	44	51	58	----
5	20	27	34	41	48	55	62	----

・・・・・・・・・

得点になれない数は
1,2,3,5,6,9,10,13,17
の９個で　最大数は 17
18 以上はすべてある。

＜次は、(A)、(B) を例にして一般化＞

(C)　トライで a 点、ゴールで b 点　　ただし、a、b は整数で互いに素

$P'' = ax'' + by''$、x''、y'' は整数で　$x'' \geqq 0$、$y'' \geqq 0$　・・・　(3)

$0 < a < b$ として、b、$2b$、$3b$、・・・、$(a-1)b$ を a で割ったときの
商と余りを、q_1、q_2、q_3、…、q_{a-1} ；　r_1、r_2、r_3、…、r_{a-1} とし、

$b = aq_1 + r_1$　、　$2b = aq_2 + r_2$　、…　、　$(a-1)b = aq_{a-1} + r_{a-1}$

＜表の代わりに＞　$y'' = 0$、1、2、3、… 、$a-1$ とおいて　（$x'' = 0$、1、2、3、… 、$a-1$）

（縦）　0列　$y'' = 0$　　$P'' = ax''$　　　$= a$ の倍数　　$(0, a, 2a, 3a, \cdots)$

1列　$y'' = 1$　　$P'' = ax'' + b$　　$= a(x'' + q_1) + r_1$　　$(b, a+b, 2a+b, 3a+b, \cdots)$

2列　$y'' = 2$　　$P'' = ax'' + 2b$　　$= a(x'' + q_2) + r_2$　　$(2b, a+2b, 2a+2b, 3a+2b, \cdots)$

----

a-1列　$y'' = a-1$　　$P'' = ax'' + (a-1)b$　$= a(x'' + q_{a-1}) + r_{a-1}$　　$((a-1)b, a+(a-1)b, 2a+(a-1)b, , \cdots)$

課題Ａ　「r_1、r_2、r_3、…、r_{a-1}」は並びは別にして整数の集合として｛ 1、2、3、…、a-1 ｝と一致する。

（解）　$0 < r_1$、r_2、r_3、…、$r_{a-1} < a$　の $a-1$ 個の整数だから　r_1、r_2、r_3、…、r_{a-1} がすべて異なることを示せばよい。

$r_h = r_k$、　$0 < h, k \leqq a-1$ とすると、　$hb = aq_h + r_h$ 、　$kb = aq_k + r_k$ より、

$(h-k)b = a(q_h - q_k)$　で、a、b は互いに素だから h-k は a の倍数で、

$|h-k| < a-1$ だから　$h-k = 0$　すなわち　$h \neq k$ ならば　$r_h \neq r_k$、
よって、　$\{ r_1、r_2、r_3、\cdots、r_{a-1} \} = \{ 1、2、3、\cdots、a-1 \}$

課題Ｂ 得点になれない（ $ax'' + by''$ （$x''、y'' \geqq 0$））で表されない ）最大数は $N = (a-1)b - a = ab - (a+b)$　である。

（解）(1) (C) の＜表の代わりに＞より、m を負数を含めた整数とすると、
$y''=0$; $M_0 = \{am\}$ 、 $y''=1$; $M_1 = \{am+r_1\}$ 、… 、$y''=a-1$; $M_{a-1} = \{am+r_{a-1}\}$
$\{0、r_1、r_2、\cdots、r_{a-1}\} = \{0、1、2、\cdots、a-1\}$
任意の整数を a で割った余りは、 0、1、2、…、a-1 のいずれかになるから、
a-1 個の集合、$M_0、M_1、M_2、\cdots、M_{a-1}$ は、 整数全体をカバーする。
(2)　$P'' = ax'' + by''$、x''、y'' は整数で　$x'' \geqq 0、y'' \geqq 0$　に制限すると、$0 < a < b$ として、
M_0 は、　0、a、2a、… 、　a の倍数はすべて表される。
M_1 は、　b、a+b、2a+b、… 、　表されない最大数は、$- a + b = b - a$
M_2 は、　2b、a+2b、2a+2b、… 、　表されない最大数は、$2b - a$
M_3 は、　3b、a+3b、2a+3b、… 、　表されない最大数は、$3b - a$

M_{a-1} は、(a-1)b、a+(a-1)b、2a+(a-1)b、… 、表されない最大数は、$(a-1)b - a = ab - (a+b)$
以上より、得点になれない最大数は $N = ab - (a+b)$ である。

「Ｔｏｐｉｃ　８　ラグビーの得点余滴」
ラグビーの試合で、得点になれない数の個数と、得点の表し方は何通りあるかなど考察。

＜Ｔｏｐｉｃ　７　の結果より＞
(A)　$P = 3x + 5y$、x、y は整数で　$x \geqq 0、y \geqq 0$　・・・　(1)
(1)の形に表せない数は、1,2,4,**7** 、最大の数は **7** で、その個数は　(**7**+1)/2 = 4
(5・1 − 3・1 = 2、5・2 − 3・1 = 7、5・2 − 3・2 = 4、5・2 − 3・3 = 1)
(B)　$P' = 4x' + 7y'$、x'、y' は整数で　$x' \geqq 0、y'$・・・　(2)
(2)の形に表せない数は、 1,2,3,5,6,9,10,13,**17**、
最大の数は **17** で、その個数は　(**17**+1)/2 = 9
＜一般の場合＞

課題Ｃ　a、b（$0 < a < b$）は整数で互いに素 $P'' = ax'' + by''$、x''、y'' は整数で　$x'' \geqq 0、y'' \geqq 0$　・・・　(3) (3)の形に表せない最大の数は、$N = (a-1)b - a = ab - (a+b)$ であった。また、 (3)の形に表せない数の集合 G の元の個数を n(G) とすると、 $n(G) = \frac{N+1}{2} = \frac{ab-(a+b)+1}{2}$　と予想される。これを示せ。

（証明、考察などは次回に回す。）

＜気になった話＞

龍の爪は何本？　３本、５本？

中国（北京の紫禁城－故宮）の龍は全部、爪が５本、朝鮮とベトナムの龍は４本。ところが、日本は華夷秩序が１番下だから、中国が日本には３本しか許さなかった。
（「徹底究明！　ここまで違う日本と中国（石平、加瀬英明　自由社）」より）