数学散歩　Ｖ－９　　　　　　　　　　２０１７．１．α　　岐阜市　村山錞司

―　数学教養書の中から　―

「青春の日の数学セミナー　中沢貞治（現代数学社）」（その９）

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜お年玉問題＞(ｸﾘｽﾏｽ・ﾌﾟﾚｾﾞﾝﾄの続編)

＜本題＞　二人の持ち金の比率が m ： n で、その中の 1 ずつの賭けで、どちらかの持ち金がなくなるまでゲームを続ける。最初の持ち金が m の方が勝つ確率は $p(m,n) = m/(m+n)$ であることを示す。（参考　$m \neq 0$ のとき、$p(m,0) = 1$、$p(0,m) = 0$、$p(m,n) + p(n,m) = 1$ ）

下調べの問題Ａ　$m\neq0$、$n\neq0$ で、 $m + n = 2$、3、4 のとき $p(m,n)$ をすべて求めよ。(答は最後)

質問（前回の続き）床屋（理髪店）での話：（顔剃りの途中）「鼻毛のカットを○○円で始めました。いかがですか。」客の答「結構です。」

(客の真意？)「結構(なこと)です。(是非カットしてください。)」「(やらなくて)結構です。」

＜問題と考察など＞

「Ｔｏｐｉｃ　９　ある電話番号」

電話番号 (48)1444 の $144 = 12^2$、144 に 4 をかき足して $1444 = 38^2$ これは珍しい！

（本の記述を解釈して）（よく分からないが何故か分数の話になった。この本ではよくあること。）

$a>0$ のとき、$0<\dfrac{1}{a+1}<1$　だから　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+1)^n}=\frac{\frac{1}{a+1}}{1-\frac{1}{a+1}}=\frac{1}{a}$

$$\therefore\quad \frac{1}{a}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{(a+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(a+1)^n}+\cdots$$

２項目以降の和は、$\dfrac{1}{(a+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(a+1)^n}+\cdots=\dfrac{1}{(a+1)^2}\cdot\dfrac{1}{1-1/(a+1)}=\dfrac{1}{a(a+1)}$

$$\therefore\quad \frac{1}{a}=\boxed{\frac{1}{a+1}}+\frac{1}{a(a+1)}\qquad\cdots(*)$$

$a \to a+1$ として $\boxed{\dfrac{1}{a+1}}=\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}$　　(*) に代入

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}$$

$a \to a+1$ として $\boxed{\dfrac{1}{a+1}}=\dfrac{1}{a+3}+\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}$　　(*) に代入

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{a+3}+\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}$$

＜一般化して＞

課題　正の整数 n について次の等式を証明せよ。

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\cdots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}$$

(証明１)　　(*) を利用して n についての帰納法で示す。

(証明２)（右辺）$=\dfrac{1}{a+n}+\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+1}\right)+\left(\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{1}{a+2}\right)$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{a+n-1}-\frac{1}{a+n}\right)=\frac{1}{a}=\text{(左辺)}$$

＜この章のテーマの電話番号です。問題では受験番号になって？＞

問題[1]　Ａ君の受験番号は３けたの数で平方数である。Ｂ君の受験番号は、Ａ君の番号のおわりに４を書き足した４けたの数で、やはり平方数である。Ａ君、Ｂ君の受験番号を求めよ。

（解）　$a = x^2$ 、 $100 \leqq x^2 < 1000$　だから　$10 \leqq x < 32$　$x = 10, 11, \cdots, 31$

$b = y^2$ 、 $1000 \leqq y^2 < 10000$　で　$31 < y < 100$　$y = 32, 33, \cdots, 99$

$b = 10a + 4$ より、$y^2 = 10x^2 + 4$　だから y の１位の数は、2 か 8 で、　$x^2 = (y^2-4)/10$

y	32	38	42	48	52	58	62	68	72	78	82	88	92	98
y^2	1024	1444	1764	2304	2704	3364	3844	4624	5184	6084	6724	7744	8464	9604
x^2	102	144	176	230	270	336	384	462	518	608	672	774	846	960
x	~~10.1~~	12	~~13.27~~	~~15.17~~	~~16.43~~	~~18.33~~	~~19.6~~	~~21.49~~	~~22.76~~	~~24.66~~	~~25.92~~	~~27.82~~	~~29.09~~	~~30.98~~

よって、　$1444\ (=38^2) = 10\times144\ (=12^2) + 4$　　Ａ君 144番、Ｂ君 1444番

問題[2]　Ａ君の受験番号は３けたの数で平方数である。Ｂ君の受験番号は、Ａ君の番号のおわりに□を書き足した４けたの数で、やはり平方数である。Ａ君、Ｂ君の受験番号を求めよ。

（解）　$a = x^2$ 、 $100 \leqq x^2 < 1000$　だから　$10 \leqq x < 32$　$x = 10, 11, \cdots, 31$

$b = y^2$ 、 $1000 \leqq y^2 < 10000$　で　$31 < y < 100$　$y = 32, 33, \cdots, 99$

$b = 10a + □$ より、$y^2 = 10x^2 + □$

□の候補	0	1	4	5	6	9
y の１位の数	0	1、9	2、8	5	4、6	3、7

□ = 4 は［1］で済み。

（本には、詳しい説明はないが、ヒマツブシで正直に全てやってみた。）

＜□ = 0、1、5 の場合はダメ（表は略）＞

＜□ = 6 ＞　　$x^2 = (y^2-6)/10$

y	34	36	44	46	54	56	64	66	74	76	84	86	94	96
y^2	1156	1296	1936	2116	2916	3136	4096	4356	5476	5776	7056	7396	8836	9216
x^2	115	129	193	211	291	313	409	435	547	577	705	739	883	921
x	~~10.72~~	~~11.36~~	~~13.89~~	~~14.53~~	~~17.06~~	~~17.69~~	~~20.22~~	~~20.86~~	~~23.39~~	~~24.02~~	~~26.55~~	~~27.18~~	~~29.72~~	~~30.35~~

＜□ = 9 ＞　　$x^2 = (y^2-9)/10$

y	33	37	43	47	53	57	63	67	73	77	83	87	93	97
y^2	1089	1369	1849	2209	2809	3249	3969	4489	5329	5929	6889	7569	8649	9409
x^2	108	136	184	220	280	324	396	448	532	592	688	756	864	940
x	~~10.39~~	~~11.66~~	~~13.56~~	~~14.83~~	~~16.73~~	18	~~19.9~~	~~21.17~~	~~23.07~~	~~24.33~~	~~26.23~~	~~27.5~~	~~29.39~~	~~30.66~~

よって、　$3249\ (=57^2) = 10\times 324\ (=18^2) + 9$　［1］の場合と、Ａ君 324番、Ｂ君 3249番

≪［1］、［2｝の解を並べると≫

$$\begin{cases} 10\times 12^2 + 4 = 38^2 & 4 \text{ で割ると } 10\times 6^2 + 1 = 19^2 \\ 10\times 18^2 + 9 = 57^2 & 9 \text{ で割ると } 10\times 6^2 + 1 = 19^2 \end{cases}$$ で一致。

（本文から）$10\times 6^2 + 1 = 19^2$ は、　$10\times x^2 + 1 = y^2$ に $x = 6$、$y = 19$ の解のあることを・・・

$y^2 - 10x^2 = 1$（そしてまたまた）Pell 方程式　$x^2 - ay^2 = \pm 1$　（ a は正の整数）

（が出てくる。　$a = 10$ から、$\sqrt{10}$ の近似分数に話が変わる。）

＜ $\sqrt{a^2+b}$ の近似分数＞

課題　a に比べて b が小さいとき $\sqrt{a^2+b}$ の近似分数は、

［1］ $a + \dfrac{b}{2a}$　　［3］ $a + \dfrac{b}{2a + \dfrac{b}{2a + \dfrac{b}{2a}}}$

［2］ $a + \dfrac{b}{2a + \dfrac{b}{2a}}$　　・・・・・・・・・　である。これを考察せよ。

（例として）

$a = 1$、$b = 1$ として、　$\sqrt{2}$ の近似分数は、$\dfrac{3}{2}$、$\dfrac{7}{5}$、$\dfrac{17}{12}$、・・・

$a = 2$、$b = 1$ として、　$\sqrt{5}$ の近似分数は、$\dfrac{9}{4}$、$\dfrac{38}{17}$、$\dfrac{161}{72}$、・・・

$a = 3$、$b = 1$ として、　$\sqrt{10}$ の近似分数は、$\dfrac{19}{6}$、$\dfrac{117}{37}$、$\dfrac{721}{228}$、・・・

（(参考) $y^2 - 10x^2 = 1$、$\sqrt{10}$ の近似分数　19/6 から、　$19^2 - 10\times 6^2 = 1$）

（本には、「数学Ｉテストノート（学校図書発行）の平方根のところを思い出しました。」とあるのみで、証明などはない。）

（考察）　$0 < b < a$ として、

$y_1 = a$、　$y_{n+1} = a + \dfrac{b}{a + y_n}$　とすれば、

［1］ $y_2 = a + \dfrac{b}{2a}$　　［3］ $y_4 = a + \dfrac{b}{2a + \dfrac{b}{2a + \dfrac{b}{2a}}}$

［2］ $y_3 = a + \dfrac{b}{2a + \dfrac{b}{2a}}$　　・・・・・・・・・

$y = a + \dfrac{b}{a+x} = \dfrac{b}{x+a} + a = \dfrac{ax+a^2+b}{x+a}$、　$y = x$　との交点の x 座標は、

$x^2+ax = ax+a^2+b$　、　$x^2 = a^2+b$ より、　$x = \pm\sqrt{a^2+b}$

$$y_{n+1} - \sqrt{a^2+b} = \frac{b}{y_n + a} + a - \sqrt{a^2+b} = \frac{b(\sqrt{a^2+b} - a)}{(y_n + a)(\sqrt{a^2+b} + a)}$$

$$\therefore\ \left| y_{n+1} - \sqrt{a^2+b} \right| < \frac{b}{4a^2} \cdot \left| y_n - \sqrt{a^2+b} \right|$$　よって、　$y_n \to \sqrt{a^2+b}$

下調べの問題Ａ　$m\neq 0$、$n\neq 0$ で、　$m + n = 2$、3、4 のとき $p(m,n)$ をすべて求めよ。

（答のみ）$p(1,1)=1/2$、$p(2,1)=2/3$、$p(1,2)=1/3$、$p(3,1)=3/4$、$p(2,2)=1/2$、$p(1,3)=1/4$