数学散歩　Ｖ－６　　　　　　　　　２０１６．１１．β　　岐阜市　村山錞司

―　数学教養書の中から　―

「青春の日の数学セミナー　中沢貞治（現代数学社）」（その６）

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜ケチクサイ話＞ウォーキング同好会で桑名の街を歩きました。桑名まではＪＲを利用しました。
岐阜から名古屋までは４７０円、名古屋から桑名までは３５０円で、足すと８２０円。
通しにすると、岐阜から桑名までは９７０円で、＋１５０円になり何か変です？
（話の続きはこの報告の終りにあります。）

＜問題と考察など＞

「Ｔｏｐｉｃ　６　πを表す式」

（本文から）　大学１年生の教科書には

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} \quad \text{(L.Euler)}$$

と並んで、必ずと言ってよいくらい

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239} \quad \text{(J.Machin)} \cdots \text{(A)}}$$

がでています。・・・　一方、関数の展開のところで

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \quad (-1 < x \leqq 1)$$

を学びます。すると、これによって

$\tan^{-1}\frac{1}{2}$、$\tan^{-1}\frac{1}{3}$、・・・、$\frac{\pi}{4}$　したがってπの近似値を求めることができるのです。

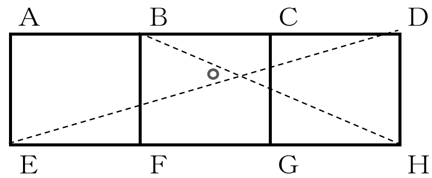
（以下、(A) の証明に続けていろいろ書かれているが省略する。）

＜参考＞　２０１３．８ の「数学散歩（２）」から（再掲）

問題１ ⑴　（２＋i）（３＋i）＝５（１＋i）を利用して、次の値を求めよ。

$$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$$

⑵　３つの正方形が横に並んでいる。２つの線分ＢＨとＥＤのなす角を求めよ。



⑴、⑵とも 答は $\pi／4$

問題２　次を証明せよ。

(A)　$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$

（略解）　⑴　$\tan^{-1}\frac{1}{5} = \alpha$ とおくと、　$\tan\alpha = \frac{1}{5}$、　$\tan 2\alpha = \frac{2/5}{1 - 1/25} = \frac{5}{12}$、

$\tan 4\alpha = \frac{2 \times 5/12}{1 - 25/144} = \frac{120}{119} > 1$ で、　$\tan\frac{\pi}{4} = 1$ に近く、　$4\alpha > \frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta$ とくと、　$\tan\beta = \frac{120/119 - 1}{1 + 120/119} = \frac{1}{239}$

問題３　「$\sqrt{２}$ の近似値」

$a = \frac{m}{n}$ が$\sqrt{２}$の近似値のとき、$b = \frac{m+2n}{m+n}$ とおけば、a、b は$\sqrt{２}$をはさんでいて、b の方が a よりもよい近似値である。

$\left[\ \frac{m}{n} \rightarrow \frac{m+2n}{m+n}\ \right]$

（本より）　を証明した後で、a = 1/1 から始めると、b として

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{41}{29}$	$\frac{99}{70}$	$\frac{239}{169}$	$\frac{577}{408}$	$\frac{1393}{985}$

のような分数が得られるのですが、このとき

★ $(\frac{1}{1})^2 = 2 - \frac{1}{1^2}$、 $(\frac{3}{2})^2 = 2 + \frac{1}{2^2}$、 $(\frac{7}{5})^2 = 2 - \frac{1}{5^2}$、

$(\frac{17}{12})^2 = 2 + \frac{1}{12^2}$、 $(\frac{41}{29})^2 = 2 - \frac{1}{29^2}$、 $(\frac{99}{70})^2 = 2 + \frac{1}{70^2}$

となって、 $\boxed{\quad}$ の中で言ったことをハッキリと示します。・・・

問題４　　前問に絡んで★について考察せよ。

（考察など）　本にはいろいろ説明らしきものが書かれているが、キチンとした証明はない。Pell 方程式とか「ユークリッド原論」第２巻、第９命題が云々とあって、私の頭は受け付けず、高校生時代の受験の頃に戻った気分で自分なりに考えてみた。

また、★についても、キレイな関係で気になり数列の問題にして考えてみた。

（問題３の証明の概略）

$\frac{m}{n} - \frac{m+2n}{m+n} = \frac{m^2-2n^2}{n(m+n)}$、 $(\frac{m}{n})^2 - 2 = \frac{m^2-2n^2}{n^2}$、 $2 - (\frac{m+2n}{m+n})^2 = \frac{m^2-2n^2}{(m+n)^2}$

だから、 (A) $\frac{m+2n}{m+n} < \sqrt{2} < \frac{m}{n}$ か (B) $\frac{m}{n} < \sqrt{2} < \frac{m+2n}{m+n}$

$(\frac{m}{n} - \sqrt{2})^2 - (\frac{m+2n}{m+n} - \sqrt{2})^2$

$= (\frac{m}{n} + \frac{m+2n}{m+n} - 2\sqrt{2})(\frac{m}{n} - \frac{m+2n}{m+n})$

$= \frac{(m-\sqrt{2}n)^2 (m+\sqrt{2}n) \{m+(2-\sqrt{2})n\}}{n^2(m+n)^2} > 0$

よって、 $\frac{m+2n}{m+n}$ の方が $\frac{m}{n}$ より $\sqrt{2}$ に近い。

（問題４について）

$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$ 、$x_1 = y_1 = 1$ のとき、 $\frac{x_n^2}{y_n^2} = 2 + \frac{(-1)^n}{y_n^2}$ を示せばよい。

$x_{n+1} - ty_{n+1} = (1-t)x_n + (2-t)y_n$

$x_{n+1} - ty_{n+1} = (1-t)(x_n - ty_n)$

y_n の係数を比較して、

$2-t = -t(1-t)$ 、$t^2 = 2$ 、 $t = \pm\sqrt{2}$

$t = \sqrt{2}$ として、 $x_{n+1} - \sqrt{2}y_{n+1} = (1-\sqrt{2})(x_n - \sqrt{2}y_n)$ だから、$x_1 = y_1 = 1$ より

$x_n - \sqrt{2}y_n = (1-\sqrt{2})^{n-1}(1 - \sqrt{2}) = (1-\sqrt{2})^n$

$t = -\sqrt{2}$ として同様に、

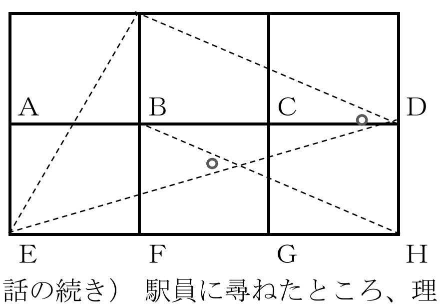
$x_n + \sqrt{2}y_n = (1+\sqrt{2})^{n-1}(1 + \sqrt{2}) = (1+\sqrt{2})^n$

ゆえに、 $(x_n - \sqrt{2}y_n)(x_n + \sqrt{2}y_n) = x_n^2 - 2y_n^2 = (-1)^n$

よって、 $\frac{x_n^2}{y_n^2} = 2 + \frac{(-1)^n}{y_n^2}$

（参考）

問題１　⑵　３つの正方形が横に並んでいる。２つの線分ＢＨとＥＤのなす角を求めよ。



（ケチクサイ話の続き）　駅員に尋ねたところ、理由は、岐阜―名古屋 間は名鉄が並行しているため運賃を下げているとのこと。往復で３００円、気になるところです。３００円安くするには名古屋駅で改札を通らなければならないそうです。当日は？　岐阜から名古屋以遠については他も同様です。また、岐阜―名古屋 間を含む区間についてもありそうです。

岐阜－富田　間は往復で４００円の違い。