数学散歩　Ｖ－８　　　　　　　　２０１６．１２．β　　岐阜市　村山錞司

―　数学教養書の中から　―

「青春の日の数学セミナー　中沢貞治（現代数学社）」（その８）

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜ＰＲなど＞先日、ＯＢ校長会の**ｳｫｰｷﾝｸﾞ同好会(PWC)**で名古屋市南部の大高緑地を「散歩」しました。絶好の行楽日和。楽しいひとときで、もっと多くのメンバーとご一緒できればと思いました。

若手（？）の皆さんの参加を願っています。楽しい語らいとエレガントな「散歩」、誘い合って気楽に仲間に入ってください。よろしく。　　ＰＷＣの一人の老（？）会員から。

質問　床屋（理髪店）での話：（顔剃りの途中）「眉毛の下はいいですか？」「いいです。」？
皆さんはどのようにお答えですか。

ｸﾘｽﾏｽ・ﾌﾟﾚｾﾞﾝﾄ　１週間ほど楽しんだ（悩んだ）バクチの問題です。挑戦してみてください。

二人でコイン投げ（表、裏)のゲームに賭ける。どちらか一方が相手の持ち金をすっかり取り上げるまで続ける。勝つ確率は二人の持ち金に比例する。(「確率の世界(BLUE BACKS)」から)

＜問題と考察など＞

「Ｔｏｐｉｃ　８　ラグビーの得点余滴」

＜一般の場合＞　（前回に続けて）

課題Ｃ　　a、b（$0<a<b$）は整数で互いに素

$P'' = ax'' + by''$、x''、y'' は整数で　$x''\geqq 0$、$y''\geqq 0$　・・・　(3)

(3)の形に表せない最大の数は、$N = (a-1)b - a = ab - (a+b)$ であった。また、

(3)の形に表せない数の集合 G の元の個数を n(G) とすると、

$n(G) = \dfrac{N+1}{2} = \dfrac{ab-(a+b)+1}{2}$　と予想される。これを示せ。

（本を参考に、解など）＜(3)の形に表せない数を、大きい数から順に＞

$y'' = a-1$、M_{a-1} では、$(a-1)b-a$、$(a-1)b-2a$、$(a-1)b-3a$、… ＞０

$y'' = a-2$、M_{a-2} では、$(a-2)b-a$、$(a-2)b-2a$、$(a-2)b-3a$、… ＞０

$y'' = 3$　、M_3　では、 $3b-a$ 、 $3b-2a$ 、 $3b-3a$ 、… ＞０

$y'' = 2$　、M_2　では、 $2b-a$ 、 $2b-2a$ 、… ＞０

$y'' = 1$　、M_1　では、 $b-a$ 、… ＞０

＜書き直すと、$ab - (xa+yb)$ の形になる＞

M_{a-1} ; $ab-(a+b)$、$ab-(2a+b)$、$ab-(3a+b)$、…　　>0

M_{a-2} ; $ab-(a+2b)$、$ab-(2a+2b)$、$ab-(3a+2b)$、…　　>0

M_3　; $ab-\{a+(a-3)b\}$、$ab-\{2a+(a-3)b\}$ 、$ab-\{3a+(a-3)b\}$、…　>0

M_2　; $ab-\{a+(a-2)b\}$、$ab-\{2a+(a-2)b\}$ 、…　　>0

M_1　; $ab-\{a+(a-1)b\}$、…　　>0

＜従って＞　$1 \leqq \underline{q} = ax + by < ab$ 、$x \geqq 1$、$y \geqq 1$　・・・　(3)'

とおくと、(3)の形に表せない数は、$ab - \underline{q}$ の形になる。

(3)の形で表せない数の集合 G の元の個数 n(G) と、(3)' の q の元の集合 Q の元の個数 n(Q) とは、((3)の $ab-q$ と、(3)' の q が１対１に対応し）$n(G) = n(Q)$

＜まとめて＞ ① $P \geqq ab > ab - (a+b) = N$ である数 P は、すべて(3)の形に表せる。

② 1 から $ab - 1$ までの（ab より小さい）$ab - 1$ 個の整数を分類する。

まず、$n(Q) = n(G) = X$ とおく。

(3)' の形 $1 \leqq q = ax + by < ab$ 、$x \geqq 1$、$y \geqq 1$　　の数 X 個　　N(Q)

(3)　$ax'' + by''$、x''、y'' は整数で　$x''\geqq 0$、$y''\geqq 0$ に表せない数　の数 X 個　　N(G)

a、2a、3a、・・・、(b-1)a（$y'' = 0$ で $\notin Q$、na と表せ $\notin G$）　b-1 個

b、2b、3b、・・・、(a-1)b（$x'' = 0$ で $\notin Q$、nb と表せ $\notin G$）　a-1 個

以上から、$ab - 1 = 2x + a-1 + b-1$ で、$x = n(G) = \dfrac{ab-(a+b)+1}{2} = \dfrac{N+1}{2}$

（頭の中を整理するため、本の記述に従って・・・）

$P = 4x + 7y$、$x\geqq 0$、$y\geqq 0$ の形に表せない数の集合 G の元 g を

$Q = \{ q \mid q = 4x + 7y < 28, x\geqq 1, y\geqq 1 \}$ の元 q を使って、　$\underline{g = ab - q}$

Q = {q}	G = {g|g=ab−q}		g = a・b − q
1・4+1・7 = 11	28 − 11 = 17		1 = 4・7 − (5・4+1・7)
2・4+1・7 = 15	28 − 15 = 13		2 = 4・7 − (3・4+2・7)
3・4+1・7 = 19	28 − 19 = 9	並	3 = 4・7 − (1・4+3・7)
4・4+1・7 = 23	28 − 23 = 5	べ	5 = 4・7 − (4・4+1・7)
5・4+1・7 = 27	28 − 27 = 1	替	6 = 4・7 − (2・4+2・7)
1・4+2・7 = 18	28 − 18 = 10	え	9 = 4・7 − (3・4+1・7)
2・4+2・7 = 22	28 − 22 = 6	て	10 = 4・7 − (1・4+2・7)
3・4+2・7 = 26	28 − 26 = 2		13 = 4・7 − (2・4+1・7)
1・4+3・7 = 25	28 − 25 = 3		17 = 4・7 − (1・4+1・7)

＜a、b の分配について＞

g	= 7・4 − q	4・7 − q
1	= 2・4 + (−1)・7	(−5)・4 + 3・7
2	= 4・4 + (−2)・7	(−3)・4 + 2・7
3	= 6・4 + (−3)・7	(−1)・4 + 1・7
5	= 3・4 + (−1)・7	(−4)・4 + 3・7
6	= 5・4 + (−2)・7	(−2)・4 + 2・7
9	= 4・4 + (−1)・7	(−3)・4 + 3・7
10	= 6・4 + (−2)・7	(−1)・4 + 2・7
13	= 5・4 + (−1)・7	(−2)・4 + 3・7
17	= 6・4 + (−1)・7	(−1)・4 + 3・7

＜+ 28＞ = 4・7、7・4

28を「−」の方に足す		
29 = 2・4 + 3・7		
30 = 4・4 + 2・7		
31 = 6・4 + 1・7	↓	
33 = 3・4 + 3・7	一	
34 = 5・4 + 2・7	通	
37 = 4・4 + 3・7	り	
38 = 6・4 + 2・7	↓	
41 = 5・4 + 3・7		
45 = 6・4 + 3・7		

（本の記述を一般化）

a、b（0＜a＜b）は整数で互いに素

Q = { q ｜ q = ax + by ＜ ab、x≧1、y≧1 }　= { a+b、2a+b、a+2b、2a+2b、…＜ab }

G = { g ｜ g = ab − q、q ∈ Q }　= { ab−(a+b)、ab−(2a+b)、…＜ab }

P″ = ax″ + by″、x″≧0、y″≧0（x″、y″は整数）の解 について　（課題Ｃに絡んで）

(ｲ)　p″ = g のとき、解なし。

∵ g = ab−q = ab−(ax_0+by_0) = (b−x_0)a−y_0b、−ax_0+(a−y_0)b　で x＜0 または y＜0

(ﾛ)　P″ = q のとき、解１組

∵ q = ax_0+by_0　a、b は互いに素だから、一通りのみ

(ﾊ)　P″ = ab + g のとき、解１組

∵ ab + g = ab+ab−(ax_0+by_0) = (b−x_0)a+(a−y_0)b　の一通り

(ﾆ)　P″ = ab + q のとき、解２組

＜次の課題Ｄで対応＞

課題Ｄ　a、b（0＜a＜b）は整数で互いに素で、
Q = { q ｜ q = ax_0 + by_0 ＜ ab、x_0≧1、y_0≧1 }　のとき、
ab + q = ax + by、x＞0、y＞0
の解（x、y）は２通りあり、２通りに限る。

（参考）
ab + q = ab + ax_0 + by_0
= a(b + x_0) + by_0
、ax_0 + b(a +y_0)　の２通り

（証明）　解を　(x_1、y_1)　、(x_2、y_2)　(x_1 ＞ x_2) とすると、

ax_1+ by_1 = ax_2 + by_2 だから、　a(x_1− x_2) = b(y_2 − y_1)

a、b は互いに素だから x_1− x_2 は b の倍数

q＜ab より ab+q ≦2ab−1 で、 ab + q = ax_1+ by_1 = ax_2 + by_2 ≦2ab−1

0＜x_1＜2b 、 0＜x_2＜2b　∴ 0＜x_1− x_2＜2b　∴ x_1− x_2 = b（(参考) 参照）

解が３通り以上あるとして、解を　(x_3、y_3)　(x_1＞x_2＞x_3) とすると、

x_1− x_2 = b、 x_2− x_3 = b　加えて　x_1− x_3 = 2b ＜ 2b で不可

＜本では、（得点の値の集合として）抜けているので追加＞

S = { s ｜ s = ax' + by' ＜ ab、x'=0、y'＞0 か x'=0、y'＞0 }
= { a、2a、3a、…(b−1)a、b、2b、3b、…、(a−1)b }

＜素朴な疑問「何通りか？」＞

ma + nb (m、n は0 以上の整数) の組合せ (m、n) について次のように考えてみた。

0 = 0a + 0b	(0, 0)	１組
ab = ba + 0b = 0a + ab	(b, 0), (0, a)	２組
2ab = 2ba + 0b = ba + ab = 0a + 2ab	(2b, 0), (b, a), (0, 2a)	３組
3ab = 3ba + 0b = 2ba + ab = ba + 2ab = 0a + 3ab	(3b, 0), (2b, a), (b, 2a), (0, 3a)	４組

＜本から＞

P	解の組
2ab + g	2
3ab + g	3
…	…

P	解の組
2ab + q	3
3ab + q	4
…	…

（付記）
課題Ｄより　ab + q は 2 通り
また、前掲(ﾊ)より、
ab + g = (b−x_0)a+(a−y_0)b　1 通り

と続けることができて、P を与えたとき P = ax + by、x＞0、y＞0 に何組の解があるかを容易に決定できるわけです。

＜本の例から＞

(ｲ)　32点は　32 = 2×(3×5) + 2 で 2 ∈ G だから 2 通り
(ﾛ)　100点は 100 = 6×(3×5) + 10 で 10 ∈ Q だから 7 通り

（私の解釈）　(ｲ)　2 = (−1)・3 + 1・5 ∈ G

2×(3×5) = 10・3 + 0・5、5・3 + 3・5 を加えて、上の「−」を「+」にすると、

9・3 + 1・5　と 4・3 + 4・5　の２通り

(ﾛ)　10 = 2×5 = 0・3 + 2・5 ∈ Q　（本の誤りで、前記の集合 S も Q に含めるとする）

6×(3×5) =30・3+0・5、25・3+3・5、20・3+6・5、15・3+9・5、
10・3+12・5、5・3+15・5、0・3+18・5　を上に加えて、

100 =30・3+2・5、25・3+5・5、20・3+8・5、15・3+11・5、
10・3+14・5、5・3+17・5、0・3+20・5　の７通り

＜追加問題＞

(+α)　53点は　53 = 3×(3×5) + 8 で 8 ∈ Q だから 4 通り　（解略）