数学散歩　Ⅵ－１　　　　　　　　　２０１７．３．α　　岐阜市　村山錞司

―　数学教養書の中から　―

「数のエッセイ　一松 信（中央公論社）」（その１）

（本の「あとがき」から）・・・あえて「数のエッセイ」という題でまとめてみた。もとより数学論というものではなく、むしろ随筆的なものにすぎない。・・・）

本の奥付には「昭和５３年９月２０日　８版発行」とあり、昔、よく読まれた本であろう。この報告をまとめるにあたって久し振りに再読した。私には難しくてレベルの超える内容もあるが、それなりに楽しめる本であった。目にとまった提言や興味を引く問題、話題などをいくつか紹介する。

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

《目覚ましの問題》

１周１ｋｍのレース場がある。時速３０ｋｍで１周目を走った後、２周平均で時速６０ｋｍにするには、２周目を時速何ｋｍで走ればよいか。（答は、最後にあり。）

＜問題と考察など＞

「数学の難しさ」（５頁～２０頁）（目次には番号なしで１１のテーマが掲載）

◎「数学方言」に注意　：　その最たるものは、「明らかに」という語である。これが出てきたら、多くの場合「その証明はめんどくさい」と心得たほうがよい。・・・気になったら読者が自分で考えてみろ」という意味の符牒だと思ったほうがよい。

◎ 重要なのは「定義」　：　数学書を読むおりに最も重要なのは、定理や例よりもむしろ定義であるかもしれない。・・・（同感。数学教養書の中には、定義が不明瞭で読解に苦労するものも多い。）

（本文から）このごろはあまり見かけなくなったが、以前は試験問題によく、

試験問題　数列　1,2,5,10,17,・・・の第 7 項は何か？

というような問題があった。純粋数学者はおそらく「無意味」、「不定」と答えるだろう。私もそれが正解と思う。・・・　この数列が　$(n-1)^2+1$ に、　$n = 1$、2、3、・・・とおいたものである、という必然性はないはずである。・・・n に 7 を代入した 37 が正解とするのは・・・独善的な感じさえする。

問題　⑴　試験問題の修正案を示せ。 ⑵　第 7 項が 37 以外になる例をつくれ。

（解）⑴（本から）ただし、数列は自然数 n の２次式（あるいは４次以下の多項式）で表されている、とする。

⑵（例として、ラグランジュの公式を利用）

①　1,2,5,10,17,26,・・・とする。

$$a_n = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)(1-6)}\times 1 + \frac{(n-1)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)(2-6)}\times 2$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-4)(n-5)(n-6)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)(3-6)}\times 5 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-5)(n-6)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)(4-6)}\times 10$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-6)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)(5-6)}\times 17 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(6-1)(6-2)(6-3)(6-5)(6-5)}\times 26$$

とおけば、　$a_1 = 1$、　$a_2 = 2$、　$a_3 = 5$、　$a_4 = 10$、　$a_5 = 17$、　$a_6 = 26$、

$$a_7 = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{-1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\times 1 + \frac{6\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4}\times 2 + \frac{6\cdot5\cdot3\cdot2\cdot1}{-2\cdot1\cdot1\cdot2\cdot3}\times 5$$
$$+ \frac{6\cdot5\cdot4\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot1\cdot2}\times 10 + \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot1}{-4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot1}\times 17 + \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\times 26$$
$$= -1 + 12 - 75 + 200 - 255 + 156 = \underline{\mathbf{37}}$$　（失敗！！！）

②　1,2,5,10,17,<u>**0**</u>,・・・で、第６項を $a_6 = 0$ とすると、①と同様の計算で、

$a_7 = -1 + 12 - 75 + 200 - 255 + \underline{\ \mathbf{0}\ } = \underline{\mathbf{-119}}$　（第６項の数によって変わる。）

＜数学こぼれ話（コラム）― 数学者的な特別な場合＞

アメリカの本で、例題として　$\sqrt[1/2]{3} = 9\ (= 3^2)$　というのをみたことがある。・・・

・・・数学的には全く正しいが、読者諸氏はどう感ずるだろうか？

「数の表し方」（２３頁～３７頁）

<u>「連分数表示」は「ユークリッド互除法」とそっくり</u>

A を B ではかったら 1 余り C	A = B×1 + C	C = 5E + E = 6E
B を C ではかったら 1 余り D	B = C×1 + D	B = 6E + 5E = 11E
C を D ではかったら 1 余り E	C = D×1 + E	A = 11E + 6E = 17E
D を E ではかったら 5	D = 5E	

$$\therefore \frac{A}{B} = \boxed{\frac{17}{11}}$$

◎　A の B に対する比は（連分数表示）

$$\frac{A}{B} = 1 + \frac{C}{B} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{B}{C}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{C}{D}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{E}{D}}}$$

$$\boxed{= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{5}{6}} = 1 + \frac{6}{11} \boxed{= \frac{17}{11}}$$

（「数学散歩　V-12 課題」を参照されたい。）

問　$\dfrac{3^3}{2^3} = \dfrac{27}{8}$　を連分数表示せよ。

（解）

$$\frac{27}{8} = 3 + \frac{3}{8} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3}} \boxed{= 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}$$

（本文から）　「近似分数」は、もとの数の最良近似有理数列を与えるから、数の表現には有利なことがある。・・・

（本では、別の話題を扱っているが、「数学散歩　V-6 」で「$\sqrt{2}$ の近似値」の問題をやっており、連分数表示に関連して、以下で、少し再考する。）

（どこか？で見た方法から）　$x = \sqrt{2}$ 、$x^2 = 2$、　$x^2 - 1 = 1$、$(x - 1)(x + 1) = 1$　より、

$$x - 1 = \frac{1}{x + 1} \quad \therefore \boxed{x = 1 + \frac{1}{1 + x}} = 1 + \cfrac{1}{1 + 1 + \cfrac{1}{1 + x}} = 1 + \boxed{\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + x}}}$$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{1 + x} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + x}}} \quad = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + x}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$

（試しに）

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 1}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}} = \frac{24}{17} = 1.41176\cdots \ \underline{\fallingdotseq \sqrt{2}}$$

＜「数学散歩　V-6 」の「$\sqrt{2}$ の近似値」の問題＞

問題３　　「$\sqrt{2}$ の近似値」

$a = \dfrac{m}{n}$ が$\sqrt{2}$の近似値のとき、$b = \dfrac{m + 2n}{m + n}$ とおけば、a、b は$\sqrt{2}$をはさんでいて、b の方が a よりもよい近似値である。

（参考）　$x\ (= \sqrt{2}) = 1 + \dfrac{1}{1 + x}$　で右辺の分母の x を$\dfrac{m}{n}$ とおくと　$x = \dfrac{m + 2n}{m + n}$

＜数学こぼれ話（コラム）― 四捨五入も簡単ではない＞

（本文から）・・・昔から有名な例として、ある関数の数値がある。その値が本によってまちまちで、42.55、42.6、42.5、42.54 などがあった。・・・計算機で詳しく計算してみたところ、正確な値は 42.544547283978…　であったという。（以下略）　（どう思われますか？）

ある数の値が正確に 4.345 だったとしよう。この数は十進法では有限小数だが、二進法では無限小数になる。・・・

問　　十進法の 4.345 を二進法で表せ。

4 →　$2^2 \times 1 + 2^1 \times 0 + 0$　より　　4(10) = 100 (2)

0.345 →　0.345 ×2 = $\underline{0}.690$ 、 0.690 ×2 = $\underline{1}.38$ 、 0.76×2 = $\underline{1}.52$ 、 0.52×2 = $\underline{1}.04$

・・・続けて　　4.345(10) = $100.010\underline{11000010100011110101}11000\cdots$(2)

（下線部分が循環する循環小数。できれば確認されたい。）

（参考）　十進法の 3.3 を二進法で表す。

$3 = 1 \times 2^1 + 1$　　∴　　3(10) = 11(2)　　(3(10) は 10進法で3、11(2)は2進法で11)

$\underline{0.3} \times 2 = \underline{0}.6$、 $0.6 \times 2 = \underline{1}.2$、 $0.2 \times 2 = \underline{0}.4$、 $0.4 \times 2 = \underline{0}.8$、 $0.8 \times 2 = \underline{1}.6$、

・・・続けて　$\underline{0.3}$(10) = $0.0\underline{1001}1001\cdots$(2)　（右辺は下線部分が循環）

（検算）

$$\boxed{\frac{1}{4} + \frac{1}{32}} + \boxed{\frac{1}{64} + \frac{1}{512}} + \cdots = \frac{8+1}{32} \times \frac{1}{1-1/16} = \frac{3}{10} = \underline{0.3}$$

∴　3.3(10) = $11.0\underline{1001}$(2)　（下線部分が循環）

＜数学こぼれ話― フォア・フォアーズ(Four Fours)＞

４を４個使っていろいろな数を表示するという、数学遊戯の有名な問題。１から１０までつくれ。

（本から３例を紹介）　$4 = 4^{4-4} \times 4$、$6 = (4 + 4 + 4) \div \sqrt{4}$、$10 = (44 - 4) \div 4$

(44 は反則ともいわれ、そうすると 10 はつくれない、ともいわれている。1～9 の例は次回に)

《目覚ましの問題》

（答）①　１周目は(1/30)・60=2(分)かかる。２周平均で60kmで走ると(2/60)・60=2(分)　で不可能。

②　２周目を　ｘｋｍ／時とすると、(1/30) + (1/x) = 2/60 で 1/x = 0 になり不可能。