数学散歩　Ⅵ－2　　　　　　　　　　２０１７．３．β　　岐阜市　村山錞司

―　数学教養書の中から　―

「数のエッセイ　一松 信（中央公論社）」（その２）

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

《目覚ましの問題》

問題　(x-a)(x-b)=x2-(a+b)x+ab、 (x-a)(x-b)(x-c)=x3-(a+b+c)x2-(ab+bc+ca)x-abc である。 では、26個の積 (x-a)(x-b)(x-c) ・・・ (x-z) を展開するとどんな式になるか。（答は最後）

＜問題と考察など＞

＜前回の最後の問（４を４個使って１から９までの数をつくる）の解答例など＞

（私の答、（　）内は本の解答例(44 は反則？)）他の例は？ また、10 については？

1 = (4+4)÷(4+4)　((4×4)÷(4×4))　　2 = (4×4)÷(4+4)　((4/4)+(4/4))

3 = (4×4-4)÷4　((4+4+4)÷4)　　4 = 4+4×(4-4)　$(4^{4-4}\times4)$

5 = (4×4+4)÷4　$(4^{4-4}+4)$　　6 = 4+(4+4)÷4　$((4+4+4)\div\sqrt{4})$

7 = (4+4)-(4÷4)　((44/4)-4)　　8 = (4+4)×(4÷4)　(4+4+4-4)

9 = (4+4)+(4÷4)　(4+4+(4/4)同じ)　　10 = 不明？　((44-4)÷4)

（本から）この変形もいろいろ・・・次のはどうでしょう。2 を 3個使って 1 から 10 までの数を表示せよ。-------これはむずかしい。1 = 2-(2/2)、2 = 2×2-2、3 = 2+(2/2)、ぐらいは誰でもできるが、その先は？　ところがずるい（？）学者が現れた。10 までどころかいくらでもつくってみせるという。その解答は----

$-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{2}}}}$　ただし、平方根は N 個重ねる。N に関する数学的帰納法で・・・示される。（確かに 2 が 3 個だ。数学的帰納法が必要か。次は？）

（与式） $= -\log_2\log_2 2^{(1/2)^N} = -\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^N\log_2 2 = N$

「大きな数の話」（４２頁～５７頁）

（本から）　一年がほぼ三千万秒であることは、心得ておくとよいと思う。（何に使うんだろう？）

問　上の一文の確認をせよ。

365 日× 24 時間× 60 分× 60 秒 = 31,536,000 秒

◎ ！とはまったくうまい記号を使たものと思う。：

右表（エクセルの表計算による） は 20 ！の表

n	n！
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600
13	6227020800
14	87178291200
15	1307674368000
16	20922789888000
17	355687428096000
18	6402373705728000
19	121645100408832000
20	2432902008176640000

◎ アルキメデスが残した家畜問題　：

（５頁にわたって解説、詳細は略）

・・・答がべらぼうに大きくなるので有名である。

・・・けっきょく 2 次の不定方程式（ペル方程式）

$(2t+1)^2 = an^2 + 1$、a = 4729494　を解くことである。・・・（大変な計算らしい。（略））

◎ ノルマン軍団の問題　：　（本から）

正方形に兵士が並んだ軍団が 61 あり、それに総大将の王一人加えて、全体が並びなおしたら、大きな正方形が出来た。全体で何人いるか。

正方形の１辺の人数を x、y とすると、

$61x^2 + 1 = y^2$　　つまり $y^2 - 61x^2 = 1$ を解くことになる。

（ D を整数として $x^2 - Dy^2 = \pm1$ の形の不定方程式をペル方程式という。ネットで検索するといろいろ出てくるが深入りしない。本には、ペル方程式の解法などの解説はなく、大きな数の答のみが示されている。）　　なお、この方程式の最小解は、

x = 226153980、y = 1766319049、全兵力 3119882982860264401(人)

＜数を変えて（本から）次の方程式にして＞

(1)　$y^2 - 60x^2 = 1$	(2)　$y^2 - 62x^2 = 1$

（「数学散歩 V-10」などを参考にしてやってみた。）

(1) $60x^2 = (y-1)(y+1)$　、$60 = 2^2\cdot3\cdot5$ だから、y - 1 = 2m、y + 1 = 2(m + 1) とおける。

$15x^2 = m(m+1)$　　連続２整数の積 m(m + 1) で 15 の倍数になるものを順次調べる。

$5\cdot6 = 30 = 15\cdot2$、…、$15\cdot16 = 15\cdot4^2$ より m = 15、x = 4、y = 31、全兵力 961(人)

(2) $62x^2 = (y-1)(y+1)$　、 $60 = 2\cdot31$ だから、 y - 1 = 2m、y + 1 = 2(m + 1) 、x = 2k

$2\cdot31k^2 = m(m+1)$　連続２整数の積 m(m + 1) で 31 の倍数になるものを順次調べる。

$31\cdot32 = 2\cdot31\cdot4^2$　　より m = 31、k = 4、x = 8、y = 63、全兵力 3969(人)

「完全数と友愛数」（６０頁～７８頁）

＜完全数＞　　（本より）

正の整数 n に対して、n の約数全体（1、n も含めて）の和を a(n) で表す。a(n) がちょうど 2n になるとき（ n を除く約数全体の和が n に等しくなるとき）n を完全数、a(n)＞2n のとき過剰数、a(n)＜2n のとき不足数という。

◎ $p = 2^n - 1$ が素数ならば $2^{n-1}p$ は完全数である。 ：

（例）　$n = 2$、$p = 3$、$2^{n-1}p = 6$ 、 $n = 7$、 $p = 127$、$2^{n-1}p = 8128$

$n = 3$、$p = 7$、$2^{n-1}p = 28$ 、 $n = 13$、 $p = 8191$、$2^{n-1}p = 33550336$

$n = 5$、$p = 31$、$2^{n-1}p = 496$ 、

（「ユークリッド原論 第９巻」の最後に出ているとのこと。本に証明はない。）

$2^{n-1}p$ の約数の和は　$1+2+2^2+\cdots 2^{n-1}+p+2p+2^2P+\cdots+2^{n-1}p = (2^n-1)(p+1) = 2^n p = 2\cdot 2^{n-1}p$

（本から）有名な数学者オイラーは、偶数の完全数はすべて前記に限ることを証明した。奇数の完全数は、現在まで具体例は一つも知られていないが、存在しないという証明もない。・・・

＜メルセンヌ数＞　　$p = 2^n - 1$ の形の数をいい、素数であるものをメルセンヌ素数という。

メルセンヌ数 $p = 2^n - 1$ が素数であるためには、n が素数であることが必要条件であるが、逆は正しくない。 n が素数でも、$2^n - 1$ が素数とは限らない。

問　n が素数でなければ、メルセンヌ数 $p = 2^n - 1$ は素数でないことを示せ。

（明らかのためか、本に証明らしきものはなかった。）　$n = hk$ とすると、

$2^{hk} - 1 = (2^h)^k - 1 = (2^h - 1)(2^{h(k-1)} + 2^{h(k-2)} + \cdots + 2^h + 1)$　よって、素数ではない。

（上の（例）で）n = 2、3、5、7、13 のとき、それぞれ p = 3、7、31、127、8191 は素数であるが、

n = 11 のとき p = 211 − 1 = 2047 = 23×89 で素数ではない。

（本では、電子計算機（コンピュータとなっていない？）によるメルセンヌ数の探索の経過などが数頁にわたって書かれているが、ここでは割愛する。）

＜友愛数（amicable number）＞　　（なぜか、完全数の英訳が本にはない。）

$$\begin{cases} a(n) - n = (\text{ n 自身を除く約数の和}) = m \\ a(m) - m = n \end{cases}$$

となる一対の m、n の組を友愛数の組という。

◎ 完全数とは「自分自身と友愛数となる数」

◎ 最も古く知られた友愛数の組（最小となる）は、 220 と 284

$220 = 2^2\times5\times11$ → $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 = 284$

$284 = 2^2\times71$ → $1+2+4+71+142 = 220$

次の例　　1184（本では 1784 と誤植）と 1210

$1184 = 2^5\times37$ → 約数の和 1210 、 $1210 = 2\times5\times11^2$ → 約数の和 1184

他の組の例として　　2620 ― 2924、5020 ― 5564、6232 ― 6358

奇数どうしの（最小の）組の例として、

$12285 = 3^3\times5\times7\times13$　と　　$14595 = 3\times5\times7\times139$　の組があげられている。

（参考） 約数をすべてあげ、その和を計算するのも（イライラしますが）暇つぶしになります。

＜フェルマー数＞　　$N = 2^n + 1$ の形の数

（本から）　　この形の素数は、n が 2 の累乗のときでなければならないので、ふつう

$N = 2^{2^n} + 1$　　の形に書かれる。（これだけをメルセンヌ数と呼ぶことが多い。）

問 下線部分の成立を示せ。　　　（これも明らかなためか、本に証明などはない。）

① n が 3 以上の奇数のとき、 $n = 2k+1$ とおける。

$N = 2^{2k+1} + 1 = 3(2^{2k} - 2^{2k-1} + \cdots - 2 + 1)$　　素数ではない。

② n が奇数でなく、2 の累乗でなければ、$n = 2^m(2k+1)$ とおける。

$N = 2^{2^n(2k+1)} + 1$　　　$L = 2^{2^n}$　とおくと、

$N = L^{2k+1} + 1 = (L+1)(L^{2k} - L^{2k-1} + \cdots - L + 1)$　　素数ではない。

（本より）（例） n = 0、1、2、3、4 のときそれぞれ素数になるが、

$N = 2^1+1 = 3$、 $N = 2^2+1 = 5$、 $N = 2^4+1 = 17$、 $N = 2^8+1 = 257$、$N = 2^{16}+1 = 65537$、

なお、n = 5 のときは　$N = 2^{32}+1 = 4294967297 = 641\times6700417$　は素数ではない。

◎ 双子素数：p と p+2 がともに素数の対（3－5 など）（四つ子の例）101－103－107－109、…

《目覚ましの問題》

（答）　　積の 24 個目は (x−x) = 0 で 0 になる。当たり前のことです。