数学散歩　Ⅶ－4　　　　　　　　　　　２０１７．７．α　　岐阜市　村山錞司

―　教養新書などから　―

「確率の世界　ダレル・ハフ　国沢清典訳　（講談社　BLUE BACKS）」（その１）

（ 原題　HOW TO TAKE A CHANCE ）

表面的に流し読みするだけならよいが証明したり確認するのが大変で、なかなか読みでがある本であった。面白そうな話題について２、３紹介する。（考察、証明など、私の勝手な解釈もあります。）

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

<問題と考察など>

「まえがき」の前にコラムとして<新聞記事のなかの確率>として次の４つの記事を紹介している。

（見出しから）　家が自動車に衝突　　ハンターきつねに撃たれる　　青信号が命取り

駐車税払って９万６０００ドルの釣銭をもらった男

<「青信号が命取り」の内容>

ロードアイランド州の自動車協会が、交通信号に従って横断した歩行者の死亡率は10%であると発表

「1957年には、横断中にひかれて死亡した歩行者のうち 10% は、青信号で横断した者であり、信号を無視して横断した者の死亡率は 6% にすぎなかった」「これらの数字は、交通信号が青だからといって気を配る必要がないと考えるのは危険だということを物語るものだ」と協会ではいっている。

問　記事「青信号が命取り」について考察せよ。

（結論として）　数値の10% と 6% について母数が異なり、不明で比較ができない。

（例をあげると）横断中にひかれて死亡した者を 10 人とすると青信号での死者はその 10% で 1 人。（青信号での横断者総数は不明で、1 万人のうちの 1 人かもしれない。）残りの 9 人が 6% だから信号を無視して横断した者を x 人とすると、$0.06x = 9$ より、$x = 150$（150 人中 9 人が死亡！！）

第２章　偶然を制する法

<マーチンゲール>（どこかで聞いたことがある、賭け事で「倍賭けする」方法）

コイン投げなど、１回について勝ち、負けの確率は１／２とする。勝てば賭け金と同額がもらえ、負ければ賭け金がとられる。なお、てら銭（参加費、経費）はここでは０とする。

①　まずはじめに一定額、たとえば1ドル（＄）賭ける。以後、勝つたびごとに1＄ずつ賭ける。

②　<u>**負けたときは次回の賭け金を２倍**</u>にする。その後、<u>**勝ったら賭け金は元**</u>の１＄<u>**に戻す**</u>。

問１　３回のコイン投げで、最初に１＄賭けたときの期待値（金額）を求めよ。

（答）　勝ち：○、敗け：×、数字は金額　　（○は 0、×は 1 の 2 進数の要領で表を作成）

１回	○ 1	○ 1	○ 1	○ 1	× −1	× −1	× −1	× −1	
２回	○ 1	○ 1	× −1	× −1	○ 2	○ 2	× −2	× −2	
３回	○ 1	× −1	○ 2	× −2	○ 1	× −1	○ 4	× −4	合計
計	3	1	2	−2	2	0	1	−7	0

$0\times(1/2)^3 = 0$

<u>期待値（金額）＝ 0 ＄</u>

問２　ｎ回のコイン投げでも、最初に１＄賭けたときの期待値は０になるか考察せよ。

（まえおきとして）　金額の単位の＄は略す。

(A)　各回のコイン投げで、勝った場合、得た金額から 1、2 ・・・と正数を、敗けた場合は −1、−2、・・・と負数を記す。

(B)　最初に勝った回によって、場合を区分し計算する。

(C)　ｎ回の試行における期待値を A_n とし、$1\leqq n\leqq k$ のとき $A_n = 0$ を仮定して $A_{k+1} = 0$ を示し、数学的帰納法によって証明する。

（ n = 1、2、3、4 の場合について調べる。①、②、③、・・・は試行順）

n = 1 のとき

①	1	−1

$$A_1 = (1-1)\times\frac{1}{2} = 0$$

n = 2 のとき

①	1	1	−1	−1
②	1	−1	2	−2
計	2	0	1	−3

$$A_2 = \left(2\times\frac{1}{2^2} + A_1\right) + (-1+2)\times\frac{1}{2^2} + (-1-2)\times\frac{1}{2^2}$$

$$= (2+1-3)\times\frac{1}{2^2} = 0$$

n = 3 のとき

①	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1
②	1	1	−1	−1	2	2	−2	−2
③	1	−1	2	−2	1	−1	4	−4
計	3	1	2	−2	2	0	1	−7

$$A_3 = \left(4\times\frac{1}{2^3} + A_2\right) + \left(2\times\frac{1}{2^3} + A_1\right) + (-1-2+4)\times\frac{1}{2^3} + (-1-2-4)\times\frac{1}{2^3}$$

$$= (4+2+1-1-2-4)\times\frac{1}{2^2} = 0$$

n = 4 のとき

①	1	1	1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
②	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	2	2	2	2	−2	−2	−2	−2
③	1	1	−1	−1	2	2	−2	−2	1	1	−1	−1	4	4	−4	−4
④	1	−1	2	−2	1	−1	4	−4	1	−1	2	−2	1	−1	8	−8
計	4	2	3	−1	3	1	2	−6	3	1	2	−2	2	0	1	−15

$$A_4 = \left(8 \times \frac{1}{2^4} + A_3\right) + \left(4 \times \frac{1}{2^4} + A_2\right) + \left(2 \times \frac{1}{2^4} + A_1\right)$$

$$+ (-1-2-4+8) \times \frac{1}{2^4} + (-1-2-4-8) \times \frac{1}{2^4} = (8+4+2+1-1-2-4-8) \times \frac{1}{2^4} = 0$$

以上から、n = 1、2、3、4 のとき　$A_n = 0$ 。　　$1 \leqq n \leqq k$ のとき $A_n = 0$　とすると

n = k+1 のとき、

①	1	1	・・・	1	−1	・・・	−1		−1	−1
②	1	1		−1	2		2		−2	−2
③	1	1		−2	1		−1	・	−4	−4
⋮	⋮	⋮	A_k	⋮	⋮	A_{k-1}	⋮	・	⋮	⋮
k+1	1	−1		-2^{k-1}	1		-2^{k-2}	・	2^k	-2^k
計		・・・				・・・			1	

$$A_{k+1} = \left(2^k \times \frac{1}{2^{k+1}} + A_k\right) + \left(2^{k-1} \times \frac{1}{2^{k+1}} + A_{k-1}\right) +$$

$$\cdots$$

$$+ \left(2 \times \frac{1}{2^{k+1}} + A_1\right) + 1 \times \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$- (1+2+\cdots+2^k) \times \frac{1}{2^{k+1}} = 0$$

　よって数学的帰納法により示された。

（本文から）ほとんど確実に少額の実入りがあるという意味では、数学的に安全なものといえる。しかし、（負け続けて）、大損するかもしれないというわずかではあるが、実際に起こる危険をあなたは受け入れたことになる。

＜反マーチンゲール＞

（本文から）反マーチンゲールをするには、つづけて勝つ回数（１１回などと）を前もって決めておく。一度でも負けたら、あるいはその晩がついた晩で１１回つづけて勝ってしまったらすぐにやめる。何回目で負けたとしても、はじめにかけた１＄を損するだけだ。もし１１回つづけて勝てば・・・

問３　前記の反マーチンゲールについて考察せよ。

　マーチンゲールと逆で、

①　　まずはじめに一定額、たとえば1＄賭ける。（負けたらやめる。）

②　　**<u>勝ったら次回の賭け金を２倍</u>**にする。

　５回つづけて勝ち６回目に負けたら、1+2+4+8+16−32 = −1

　１１回つづけて勝てば、$1+2+4+\cdots+2^{10} = 2047$（＄）をゲット！！！

第３章　確率のむずかしさ

（本文から）ある一人の人間の考える確率は、もう一人の人間の考える確率と同じだろうか？いつもそうとは限らないのは明らかだ。だからこそ賭けが行われるのであり、・・・

問１　（本文から）１枚の当たりくじがある１０枚のくじを入れた箱から１枚だけ引くとしよう。あるいは、１枚の当たりくじがある１００枚のくじを入れた箱から、取り出したくじを元に戻しながら１０回引いてもよい・・・　とすると、あなたはどちらを選ぶか？

(本文の続き) ５人のうちほぼ４人までは、数学的には両方とも同じ確率なのに、前者の１回だけ引ほうを選ぶことに・・・（私も気分的にはそうするが）こういう人は１００枚入っている箱から引いたくじを戻しながら５０回引いてもよいという、とりわけ歩のよい賭けのときですら前者の引き方に執着するのである。・・・理解力のある大人でさえ、確率の加法と乗法とを混同しているようだ。

問２　（本文続き）確率１０分の１の問題１つと、確率３分の１の問題３つ（この場合、３問とも正解しなければならない）のいいずれかを選ぶとき・・・とすると、あなたはどちらを選ぶか？

（本文続き）多くの人は後者を選ぶのである。（１０分の１と、２７分の１だから・・・とは思うが多分、私も後者を選ぶだろう。試験が選択問題だったら、易しい方を選んで・・）

　・・・このような考え方をする将軍は、勝ち目３分の１の戦争に３回も身をさらすことになり、戦争を成功裡に完結させるには、３回とも勝利をおさめなければならないのだ。・・・