

— 教養新書などから —

「確率の世界 ダレル・ハフ 国沢清典訳 (講談社 BLUE BACKS)」(その2)

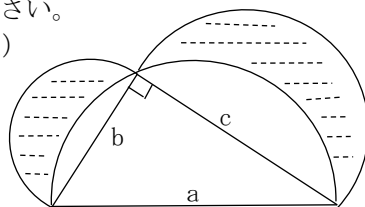
ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

《目覚ましの問題》 「ヒポクラテスの月形の問題」 (右図参照)

問題 直角三角形の面積は他の中、小の2辺の上に作った
2つの月形の面積の和

直角三角形 = 中月形 + 小月形 を示せ。

(中学3年の教科書の練習問題にも取り上げられているとのこと。)



----- <問題と考察など> -----

第4章 すべてはダイスで始まった (ダイス(dice) = サイコロ のゲーム)

<クラップ・ゲーム>—さいころ賭博で人気を集めている

(参考 辞書を引くと: craps (単数扱い) 2個のサイコロで行うばかり)

《ルールなど》賭け金が場に張られるとシューター (サイコロを振る賭け手) は2個のサイコロを振る。

- (1) 最初の振りで2個のサイコロの目の和が7か11になればシューターの勝ち (ナチュラルという)。
- (2) 目の和が2、3、12ならシューターの負け。それ以外 (4、5、6、8、9、10) は勝ちでも負けでもないが、その後のシューターの (次の(3)の(A)の) 勝ち点になる。
- (3) シューターはサイコロを次のどちらかの目が出るまで振る。
 - (A) シューターが再び勝ち点を出せばシューターの勝ち。
 - (B) 7を出せばシューターの負け。

問 クラップ・ゲームで(1)、(2)、(3)に従ってそれぞれ確率を求めよ。

(答) サイコロの目の出方 : 次の 36 通り

1-1	2-1	3-1	4-1	5-1	6-1
1-2	2-2	3-2	4-2	5-2	6-2
1-3	2-3	3-3	4-3	5-3	6-3
1-4	2-4	3-4	4-4	5-4	6-4
1-5	2-5	3-5	4-5	5-5	6-5
1-6	2-6	3-6	4-6	5-6	6-6

- (1) 和が7か11になるのは、6+2 = 8 通り
確率は $8/36 = 2/9$
- (2) 2、3、12になるのは、1+2+1 = 4 通り
確率は $4/36 = 1/9$
- (3) 最初の振りで7、11と2、3、12が出なかった場合、(A)、(B)が出るまで2回以降振ることになる。

2回目以降のシューターの勝ち点は、4、5、6、8、9、10のどれか。負けは7。

《勝ち点4の場合》(本文から) 例えば7が出る前に4が出る確率は9つのうち3つで $1/3$ である。

(和が7か4になるのは $6+3 = 9$ 通りで、4になるのは3通りだから確率は $3/9=1/3$)

(私の解釈 何回か和が4、7にならない($36-9 = 27$ 通り)後で、その後、4になるものの和だから、

$$\frac{3}{36} + \frac{27}{36} \cdot \frac{3}{36} + \left(\frac{27}{36}\right)^2 \cdot \frac{3}{36} + \dots = \frac{3}{36} \times \frac{1}{1-27/36} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad)$$

《同様にして》 勝ち点が4、10の場合、確率は $1/3$ 、5、9の場合、 $2/5$ 、6、8の場合、 $5/11$

《トータルでシューターが勝つ確率》

$$\frac{8}{36} + \left(\frac{3}{36} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{36} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{36} \cdot \frac{5}{11} \right) \times 2 = \frac{244}{495} \div 0.49293$$

(本文から)・・・シューターは結局長く賭け続ければ賭け金の 1.41 %を取られることになるだろう。

(参考 $(0.5 - 0.49293) \cdot 2 = 0.01414$)

(最後の一文)・・・トラップ・ゲームをよく知っている賭博師たちは、決してシューター側に賭けたりはしないものだ。

第7章 確率が手を決める

(最初に次の見出し)

チャンスと52枚のカード

ブリッジとポーカー

それらをうまくやるための確率

<ポーカー>

トランプ52枚 (ジョーカーは除く) での2つのゲームについての確率を論じている。ブリッジについて7、8頁にわたっての説明があるが、やったことがなく、全く理解できず。ポーカー(Poker) についてのみ紹介し、考察する。

(本の1頁から) ポーカーの役が出る確率

①	ロイヤル・ストレート・フラッシュ	♥A	♥K	♥Q	♥J	♥10	1/649,740
②	ストレート・フラッシュ	♠6	♠5	♠4	♠3	♠2	1/72,195
③	フォア・カード	♠8	♥8	♦8	♣8	♥5	1/4,165
④	フル・ハウス	♠Q	♥Q	♦8	♣8	♥8	1/694
⑤	フラッシュ	♥K	♥8	♥7	♥5	♥3	1/505
⑥	ストレート	♠6	♥5	♦4	♣3	♠2	1/256
⑦	スリー・カード	♠6	♥6	♦6	♠3	♦2	1/48
⑧	ツー・ペア	♦8	♣8	♠6	♥6	♦2	1/21
⑨	ワン・ペア	♦8	♣8	♦6	♠3	♦2	1/2.5
⑩	役なし	♦9	♠8	♦5	♠3	♦2	1/2

5 2 枚のカードを 5 枚ずつ配る。異なった手は ${}_{52}C_5 = 2,598,960$ (通り)。

問 表の「ポーカーの役の出る確率」を点検せよ。

(本では、確率の数値として、分子を 1 とし、分母はワン・ペアを除いて整数値を記している。また、計算はフラッシュ、フルハウスの 2 例について (順列を利用し) 確率の掛け算のやり方でしている。)

(本からの抜粋)

《フラッシュ》・・・1 枚目は何でもいから確率は $1/1$ 。2 枚目は最初の札と同じ組札の残り 12 枚のどれでもいいから $12/51$ 。以下、 $11/50$ 、 $10/49$ 、 $9/48$ 。これらの分数をすべて掛け合わせると $1/505$ になる。(参考 $1/1 \cdot 12/51 \cdot 11/50 \cdot 10/49 \cdot 9/48 = 1/504.84\cdots$)・・・あなたのところにくるフラッシュは、ストレート・フラッシュかもしれない。・・・その確率はロイヤル・ストレート・フラッシュも含めてわずか $1/64,974$ であり・・・(参考 $4 \cdot 10 / {}_{52}C_5 = 40/2,598,960 = 1/64,974$)

《フル・ハウス》・・・フル・ハウスを作るには 10 通りの変化がある。10 通りの 1 組 1 組が $3/20,825$ という確率である。これを計算すると 694 回に一度の確率になり・・・

(参考 $10 = 5!/(3! \cdot 2!)$ (同じものがある順列)、 $3/20,825 = (1 \cdot 3/51 \cdot 2/50) \cdot (48/49 \cdot 3/48)$ で、 $(3/20,825) \cdot 10 = 1/694.16\cdots$)

《ワン・ペア》(本のやり方を真似てやってみた)

$\{(1 \cdot 3/51) \cdot (48/50 \cdot 44/49 \cdot 40/48)\} \cdot 10 = 1/2.36\cdots$ (参考 $10 = 5!/(3! \cdot 2!)$)

質問 上のワン・ペアと同様のやり方でツー・ペアができますか？また、他はどうですか。

(私の答：本と異なり組合せの方法による。詳しい説明は省略、計算式で判断されたい。)

$\alpha = {}_{52}C_5 = 2,598,960$ とおく。

(本の表の確率)

① ロイヤル・ストレート・フラッシュ $4/\alpha = 1/649,740$ $1/649,740$ ○

② ストレート・フラッシュ $4 \cdot 9/\alpha = 36/\alpha = 1/72,193. \cdots$ $1/72,195$ △

(1~5、2~6、・・・、9~K で①を除く。)

③ フォア・カーズ $13 \cdot (12 \cdot 4)/\alpha = 624/\alpha = 1/4,165$ $1/4,165$ ○

④ フル・ハウス $(13 \cdot {}_4C_3) \cdot (12 \cdot {}_4C_2) / \alpha = 3,744/\alpha = 1/694.16\cdots$ $1/694$ △

⑤ フラッシュ $(4 \cdot {}_{13}C_5 - 4 \cdot 10)/\alpha = 5,108/\alpha = 1/508.80\cdots$ $1/505$ △

(①、②を除く。)

⑥ ストレート $(9 \cdot 4^5 - 9 \cdot 4)/\alpha = 9,180/\alpha = 1/283.11\cdots$ $1/256$ ×

(②を除く。)

(参考 $10 \cdot 4^5/\alpha = 10,240/\alpha = 1/253.80\cdots$)

⑦ スリー・カーズ $(13 \cdot {}_4C_3) \cdot (12 \cdot {}_4C_2 \cdot 4^2) / \alpha = 54,912/\alpha = 1/47.32\cdots$ $1/48$ △

⑧ ツー・ペア $(13 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_4C_2) \cdot (52 - 4 \cdot 2) / \alpha = 123,552/\alpha = 1/21.03\cdots$ $1/21$ △

⑨ ワン・ペア $(13 \cdot {}_4C_2) \cdot (12 \cdot {}_3C_3 \cdot 4^3) / \alpha = 1,098,240/\alpha = 1/2.36\cdots$ $1/2.5$ ×

⑩ 役なし $1 - (\text{①} + \sim + \text{⑨})$

$= 1 - (4 + 36 + 624 + 3,744 + 5,108 + 9,180 + 54,912 + 123,552 + 1,098,240) / \alpha$

$= 1 - 1,295,400/\alpha = 1,303,560/\alpha = 1/1.99\cdots$ $1/2$ ○?

《フォア (4 枚) ・フラッシュ》：4 枚が同種で他の 1 枚は別種のカード

(本文から) この手札は相当有望に思えるのだが、本当はあまり大事に考えすぎてかえって金を捨てるハメになる。こんなことからフォア (4 枚) ・フラッシュという言葉は、なかみよりうわべのほうがい人を用いるのに使われることもある。・・・ (例) 

問 (1) フォア・フラッシュの確率を 2 通りのやり方で求めよ。

(2) ハートの 5、6、7、8 の札と、何の役も作らない 1 枚の札がある。この不用の札を捨てて、1 枚新たに引いたとき、引ける札が $(52 - 5 =)$ 47 枚残っているとして、次になる確率を求めよ。 (例) 

(A) ストレート・フラッシュ

(B) フラッシュ

(C) ストレート

(D) ワン・ペア

問 (1) (A) (掛け算のやり方で)

$(1 \cdot 12/51 \cdot 11/50 \cdot 10/49 \cdot 39/48) \times 5 = 143/3,332 = 1/23.30\cdots$

(B) (組合せのやり方で)

$(4 \cdot {}_{13}C_4 \cdot 39) / \alpha = 111,540/\alpha = 143/3,332 = 1/23.30\cdots$

(2) (A) $2/47$ (B) $7/47$ (C) $6/47$ (D) $12/47$

(参考 何か役がつく確率は、合わせて、 $27/47$ で $1/2$ より少し大)

《目覚ましの問題》 「ヒポクラテスの月形の問題」

(答) 中月形 + 小月形 = 2 つの半円 + 直角三角形の面積 - 1 つの大半円

$= \pi b^2/8 + \pi c^2/8 - \pi a^2/8 + \text{直角三角形の面積} = \text{直角三角形の面積}$

(「小平邦彦編 数学の学び方 (岩波書店) 数学しながら学ぶ 飯高茂」から)