

「フィボナッチ数列と $\tan^{-1}\circ$ 」

いつものお店で店主から、いつものお客さんの質問のメモ書きをいただきました。

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

----- <質問と解など> -----

「メモ書きの内容」(参考 「数学散歩 VI-3 2017. 4. α 」)

$$\begin{aligned} \tan^{-1} \frac{1}{1} &= \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3}, & \tan^{-1} \frac{1}{3} &= \tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{8}, \\ \tan^{-1} \frac{1}{8} &= \tan^{-1} \frac{1}{13} + \tan^{-1} \frac{1}{21}, & \tan^{-1} \frac{1}{21} &= \tan^{-1} \frac{1}{34} + \tan^{-1} \frac{1}{55}, \\ \tan^{-1} \frac{1}{55} &= \tan^{-1} \frac{1}{89} + \tan^{-1} \frac{1}{144}, & \dots & \quad (\text{お客さん) 分角の方法によっては、フィボナッチ数} \\ & & & \quad \text{が出てくることがあるようです。} \dots) \end{aligned}$$

<フィボナッチ数列> (連続2項の和が次の項)

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, $\dots$ (アンダーラインの数が上記の左辺の分母)

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} \quad (\text{後掲 } D_2 \text{ 参照})$$

<予想される関係式>

$$(A) \quad \tan^{-1} \frac{1}{a_{2n}} = \tan^{-1} \frac{1}{a_{2n+1}} + \tan^{-1} \frac{1}{a_{2n+2}} \quad (n \geq 1)$$

(「VI-3」にならって、証明を試みる)

$$(B) \quad a_{2n+2} = a_{2n} + a_{2n+1} \quad \text{を利用する。}$$

(証明の概略)

$$\tan^{-1} \frac{1}{a_{2n}} = \alpha, \quad \tan^{-1} \frac{1}{a_{2n+1}} = \beta, \quad \tan^{-1} \frac{1}{a_{2n+2}} = \gamma$$

とおいて、 $\gamma = \alpha - \beta$ を示す。

$$\tan \alpha = \frac{1}{a_{2n}}, \quad \tan \beta = \frac{1}{a_{2n+1}}, \quad \tan \gamma = \tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{a_{2n+2}}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{a_{2n+1} - a_{2n}}{a_{2n} \cdot a_{2n+1} + 1}, \quad \frac{1}{a_{2n+2}} = \frac{1}{a_{2n} + a_{2n+1}} \quad \text{だから、}$$

$$(C) \quad (a_{2n+1})^2 - (a_{2n})^2 = a_{2n} \cdot a_{2n+1} + 1 \quad \text{が示されればよい。}$$

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \frac{1}{5} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+1} \right\}^2 \\ &\quad - \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} \right\}^2 \quad = \dots \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{5} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{4n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{4n+1} + 4 \right\}$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \frac{1}{5} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+1} \right\} + 1 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{5} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{4n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{4n+1} \right.$$

$$\left. - (-1)^{2n} \frac{1+\sqrt{5}}{2} - (-1)^{2n} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\} + 1$$

$$= \frac{1}{5} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{4n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{4n+1} + 4 \right\}$$

以上から、(C) が成立し、(A) が成立する。

$$(D_{1,2}) \quad (a_{2n+1})^2 - (a_{2n})^2 - a_{2n+1} \cdot a_{2n} = 1 \quad (C) \text{ の別証 } (D_{1,2}) \text{ です。}$$

$$\begin{aligned} (D_1) \quad & (a_{2n+1})^2 - (a_{2n})^2 - a_{2n+1} \cdot a_{2n} = a_{2n+1} \cdot (a_{2n+1} - a_{2n}) - (a_{2n})^2 = a_{2n+1} \cdot a_{2n-1} - (a_{2n})^2 \\ &= (a_{2n} + a_{2n-1}) \cdot a_{2n-1} - (a_{2n})^2 = (a_{2n-1})^2 - a_{2n} \cdot (a_{2n} - a_{2n-1}) \\ &= (a_{2n-1})^2 - a_{2n} \cdot (a_{2n} - a_{2n-1}) = (a_{2n-1})^2 - (a_{2n-1} + a_{2n-2}) \cdot a_{2n-2} \\ &= (a_{2n-1})^2 - (a_{2n-2})^2 - a_{2n-1} \cdot a_{2n-2} = \dots = a_3^2 - a_2^2 - a_3 \cdot a_2 = 4 - 1 - 2 = 1 \end{aligned}$$

(D₂) (C) と (D₁) の2つを足して2で割ったような証明です。

漸化式 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ($n \geq 3$) の特性方程式 $t^2 - t - 1 = 0$ の2根を λ, μ とすれば、

$$\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda + \mu = 1, \quad \lambda \mu = -1, \quad \lambda - \mu = \sqrt{5}, \quad a_n = \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu}$$

$$(a_{2n+1})^2 - (a_{2n})^2 - a_{2n+1} \cdot a_{2n}$$

$$= \left(\frac{\lambda^{2n+1} - \mu^{2n+1}}{\lambda - \mu} \right)^2 - \left(\frac{\lambda^{2n} - \mu^{2n}}{\lambda - \mu} \right)^2 - \left(\frac{\lambda^{2n+1} - \mu^{2n+1}}{\lambda - \mu} \right) \cdot \left(\frac{\lambda^{2n} - \mu^{2n}}{\lambda - \mu} \right)$$

$$= \frac{1}{(\lambda - \mu)^2} \left(\lambda^{4n+2} + \mu^{4n+2} - 2 \cdot (\lambda \mu)^{2n+1} - \lambda^{4n} - \mu^{4n} + 2 \cdot (\lambda \mu)^{2n} \right. \\ \left. - \lambda^{4n+1} - \mu^{4n+1} + (\lambda \mu)^{2n} \cdot (\lambda + \mu) \right)$$

$$= \frac{1}{5} \left\{ \lambda^{4n} (\lambda^2 - \lambda - 1) + \mu^{4n} (\mu^2 - \mu - 1) + 2 + 2 + 1 \right\} = 1$$