数学散歩　寄り道-6　　　　　　　２０１７．１１．？　　岐阜市　村山錞司

「中学校・高等学校　数学科 教材研究の視点　愛知県教育センター」から追加　(参考「Ⅲ-5」)

$\sqrt{2}$ は直角２等辺３角形（正方形の半分）の斜辺、$\sqrt{3}$ は正三角形の高さ、$\sqrt{5}$ は正五角形の対角線の長さに関係、・・・気になり、まとめてみた。

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題、考察、答など＞

＜ウォーミングアップの問題＞

問１　20g の重さの箱がハカリに乗っています。これに重さ 2g の小鳥を入れて箱を密閉します。小鳥が箱のどこかにとまっていればいれば当然ハカリの針は 22g を指します。では、小鳥が箱の中を飛んでいるときハカリの針は何g を指すでしょうか。

問２　分数２題

⑴ 次の分数を大きい順に並べよ。

ア $\dfrac{3}{\dfrac{4}{\dfrac{5}{6}}}$　　イ $\dfrac{\dfrac{3}{4}}{\dfrac{5}{6}}$　　ウ $\dfrac{\dfrac{\dfrac{3}{4}}{5}}{6}$

⑵ 約分せよ。

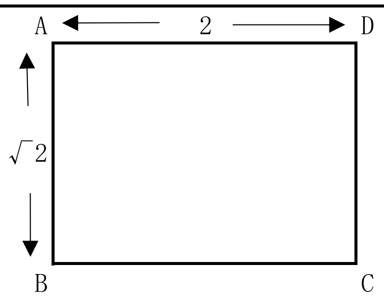
$\dfrac{1643}{2279}$

(再掲)「Ⅲ-12 2015.12」

(解などは後掲)

＜用紙の大きさ＞

紙の大きさの標準はＪＩＳに規定されている。A 列、B 列の 2 系列があり、それぞれ A_0 紙、B_0 紙を半分に切ることにより、各列とも　$\sim A_{12}$、$\sim B_{12}$ がある。ともに 2 辺の比が $1:\sqrt{2}$ で（半分に折ると相似な長方形）、A_0 紙の面積は 1 m^2、B_0 紙は A_0 紙の対角線を 1 辺とし面積は $(\sqrt{3}/\sqrt{2})^2 = 1.5$ m^2 である。



問３　わら半紙（コピー紙など長方形）を適当に折って $\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{6}$ の長さを作れ。

問４　わら半紙を適当に折って 2 辺の比が黄金比になる最も大きな長方形を作れ。

(解などは後掲)

＜ウォーミングアップの問題の解など＞

問１　答が分かったら教えてください。よろしく。

問２　⑴　ア $\dfrac{5}{8}=\dfrac{50}{80}$　イ $\dfrac{18}{20}=\dfrac{72}{80}$　ウ $\dfrac{2}{80}$　　∴　イ ＞ ア ＞ ウ

⑵　小学生はどうやるのだろうか。
ここでは
連除法（互除法）による。

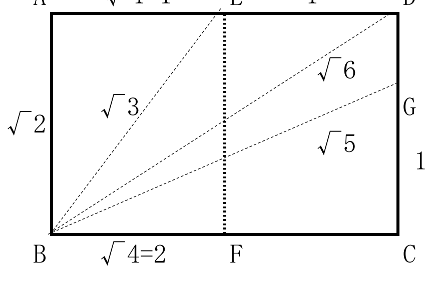
1	2279	1643	2
	1643	1272	
1	636	371	1
	371	265	
2	265	106	2
	212	106	
	53	0	

2279 ＝ 53×43
1643 ＝ 53×31

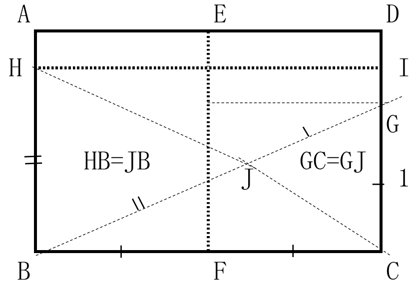
∴ $\dfrac{31}{43}$

＜用紙の大きさの解＞

問３



問４



長方形HBCI

$\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$

$=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

(名刺 2 辺の比？)

＜$\sqrt{2}$ いろいろ＞

(参考)　$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$　（無理数^{無理数}「Ⅶ-寄り道　２０１７．５」）

問５

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ の値について考える。

$a_1 = \sqrt{2}$ 、$a_{n+1} = \sqrt{2}^{\,a_n}$ （n = 1、2、・・・）で与えられる数列について次の⑴、⑵を示せ。

⑴　数列 $\{a_n\}$ は単調増加で、$1 < a_n < 2$ (n = 1、2、3、・・・) である。

⑵　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

（解）⑴　$1 < \sqrt{2} < \sqrt{2}^{\sqrt{2}} < \sqrt{2}^{2} = 2$ より　$1 < a_1 < a_2 < 2$　だから

$1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{k-1} < a_k < 2$　と仮定すると

$\sqrt{2}^{\,a_k} > \sqrt{2}^{\,a_{k-1}}$ より　$a_{k+1} > a_k$ で $a_{k+1} = \sqrt{2}^{\,a_k} < \sqrt{2}^{2} = 2$

帰納法により、数列 $\{a_n\}$ は単調増加で、$1 < a_n < 2$ (n = 1、2、3、・・・)

⑵　⑴より　$1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n < \cdots < 2$

$y = \sqrt{2}^{x} = e^{x\log\sqrt{2}}$　とおくと　$y' = \log\sqrt{2}\cdot e^{x\log\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{x}\log\sqrt{2} > 0$　y は単調増加

$y = \sqrt{2}^{x}$ についての平均値の定理から

$$\frac{2 - a_{k+1}}{2 - a_k} = \frac{\sqrt{2}^{2} - \sqrt{2}^{\,a_k}}{2 - a_k} = \sqrt{2}^{\alpha}\log\sqrt{2}\ 、\ a_k < \alpha < 2$$

よって　$\dfrac{2 - a_{k+1}}{2 - a_k} < \sqrt{2}^{2}\log\sqrt{2} = \log 2$　$\therefore |2 - a_{k+1}| < |2 - a_k|\log 2$

$|2 - a_n| < |2 - \sqrt{2}|(\log 2)^{n-1}$　　$0 < \log 2 < 1$ だから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

（参考）$y = \sqrt{2}^{x}$ と $y = x$ のグラフの交点から、$\sqrt{2}^{x} = x$ を満たすものは 2 と 4 の 2 個ある。

＜黄金比＞

問６　次の式の値を求めよ。

⑴ $$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

⑵ $$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}$$

（解）⑴　$1 + \dfrac{1}{x} = x$　　⑵　$\sqrt{1 + x} = x$

（左辺の x の代わりに左辺の式そのものを次々と代入して）

$1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}} = \cdots$　　$\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}} = \cdots$

（⑴、⑵の最初の式から）　$\underline{x^2 - x - 1 = 0}$ で　$x > 0$ より

$x = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$　　（黄金比：1.6180334…）

電卓で⑵をﾁｪｯｸ

①　x = 2 として

＋ 1 ＝ 、√ で 1.732…

(2+1 ＝ 3、√3 ＝ 1.732…)

②　＋ 1 ＝ 、√ で 1.652…

（以下、繰り返す。）

1.628…、1.621…、…

(⑴についても何とか

やりくりして…)

（参考）　フィボナッチ数列の　$a_1 = a_2 = 1$、$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ の特性方程式も

同じ式　$\underline{x^2 - x - 1 = 0}$　になる。

＜作図の難問＞

問７　平面上に与えられた異なる２点 A、B がある。コンパスのみを使って線分 AB の中点 M を作図せよ。

（作図の概略）

私の力量不足で、Excelでは円の組合せの作図ががうまくできず断念。参考図と方針などを示します。

①　点 B を中心とし、半径AB の円を描き、点 A を始めとし円に内接する正６角形の 6 頂点を作図、円は AC が直径になる。AB = BC = 2、AC = 4

②　点 C を中心とし AC を半径とする円と点 A を中心とし AB を半径とする円との交点 D 、E を作図。点 D、E を中心とする半径 2 の2つの円の交点を M とすればよい。

（参考図）