数学散歩　Ⅶ－6　　　　　　　　　　２０１７．８．α　　岐阜市　村山錞司

―　教養新書などから　―

「確率の世界　ダレル・ハフ　国沢清典訳　（講談社　BLUE BACKS）」(その３)

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題と考察など＞

第１１章　幸運とは　？　　（気になった記事を２、３紹介する。）

＜野球から＞

完全試合以上に注目すべきことが、ナショナル・リーグのカブスのある一塁手に起こった。彼は９回まで一度もボールに手を触れず、そのまま試合が終わってしまったのである。・・・野球がこれからも永久に続くというのでなければ、こういうことは二度と起こらないだろう。

（本当のことか、いつのことか、詳しいことが知りたいが、不明？　気になっています。）

＜推理するくせのある父親の話＞

彼は、子供たちが床に落とすパンがいつもバターの塗ってある方が上になるのに関心をもった。「これはまったく偶然の法則を無視している」とつぶやいた。・・・この素晴らしい出来事が１０回続いた後で、彼は真相を調べ始めたのであった。（何か大袈裟ですね。）

問　真相はいかに？　　　（答は数行の後に）

第１２章　ちょっと頭をひねってみよう（最終章　問題は１６問あり）

（意味不明なものも多い。面白そうなものなど（修正するなど手を加えて）数題紹介する。）

１　　誕生パーティーの鉢合わせ

あなたに２４人の友達があり、各々が自分の誕生日にパーティーを開く。あなたは１日に１人のパーティーしか出席できない。２つ以上のパーティーが重なり、あきらめなければならないパーティーが出てくる確率はどのくらいか。（１年は３６５日とする。）

（疑問　あなた本人の誕生日はどうするのだろう？　ここでは本人以外の２４人とした。）

$$1 - (\underbrace{1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \cdots \cdot \frac{342}{365}}_{\text{(重ならない)}}) = 1-0.461655732\cdots \fallingdotseq \underbrace{0.54}_{\text{(重なる)}}$$

（参考　数学散歩 Ⅳ-10 「マンホールのふたはなぜ丸い：お誕生会－２３人集まると・・・」）

（問の答）調べた結果、父親は、子供たちがパンの両面にバターを塗っていたことを発見したのである。（ﾂﾏﾗﾝ!!!）

４　　戦場の安全地帯（意味不明の問題と解説の例（概要））

・・・マリヤット海軍大佐が、敵の円弾があけた船の側面の穴に自分の頭をさしこみ、戦闘が終わるまでそのままの姿勢でいた一人の海軍兵学校生の話をしている。この生徒がいうことには、「インマン教授がなさった計算では、同じ穴に円弾が飛び込むみこみは32,647 回に１度」だというのだ。・・（解説として）・・第１次世界大戦中、多くの兵士がこれと同じ考えから、同じ日のうちに２つの砲弾が同じ位置に命中することは到底ありえないとして、好んで新しい砲弾でできた穴を避難所にしたものだ。・・次の砲弾がまたその場所に命中する確率は、他の場所に命中する確率と同じ 1/2 なのだ。（下線は私。気分としては、理解したいところだが、下線の数字が？？）

７　　３枚フラッシュが５枚になる確率（以下、易しい問題もあります。）

３枚の同種の手札から首尾よく（５枚の）フラッシュになる確率は？

（確率の積）　$\frac{13-3}{52-5} \cdot \frac{13-4}{52-6} = \frac{10}{47} \cdot \frac{9}{46} = \frac{45}{1081} \fallingdotseq \frac{1}{24}$

（組合せで）　$\frac{{}_{10}C_2}{{}_{47}C_2} \fallingdotseq \frac{1}{24}$

９　　文字組合せ錠

文字組合せ錠がアルファベット２６文字の３文字の組合せ（例　ＲＥＤ）からできているとすれば、文字の組合せは何種類使えるか？

順列で、　26^3 = 17,576（通り）

同じ文字を使えないとすると、　26・25・24 = 15,600（通り）

（疑問）「錠」と「鍵」は？、英語では？　いつも悩みます。

１０　油断のならないサイコロ

２つのサイコロを投げて少なくとも１つは１の目が出る確率は？

$1-(5/6)^2 = 1- 25/36 = 11/36$　　　（どこが「油断のならない」のか、意味不明）

１２　スリー・カード・ゲームで儲けよう

山師が３枚のカードを見せる。１枚は両面とも白。１枚は両面とも赤。残り１枚は赤の面と白の面。山師が１枚ひいてテーブルの上においたカードの表は白。このカードの裏について、白と赤の確率はどうか。

＜３枚＞

白Ａ、白Ｂ　１枚
白、赤　⇒
赤Ａ，赤Ｂ

表	裏
白Ａ	白Ｂ
白Ｂ	白Ａ
白	赤

白と赤のどちらかで 1/2 としたいが、
白の確率　2/3
赤の確率　1/3

１４　とても奇妙な１０人勝負

コイン投げ（表、裏の 1/2 ずつの確率）のゲームに１０人が参加する。各自、同額（例えば、１００円玉を５個ずつ）の賭け金を持っている。くじで決めた最初の二人でゲームを始め、どちらか一方が相手の持ち金をすっかり取り上げるまで続ける。次に、最初のゲームの勝者と、残り８人の中の一人とが勝負し、どちらかが一文なしになるまで続ける。これを次々に続ける。この１０人のうち一番割がいいのは誰か。最初の二人か、１０人目か、あるいは他の者か？

（本では、証明なしで次の法則が突然！！！出てくる）

《法則》・・・プレーヤーが勝つ確率は彼の持ち金にピッタリ一致する。・・・

（後で証明問題にする。（「数学散歩 V-8」のｸﾘｽﾏｽ・ﾌﾟﾚｾﾞﾝﾄ」参照）

（本文から　法則は）数学的に証明すると込み入ってくるが論理は明白だ。・・最初のプレーヤー２人が第１回戦で勝つ確率は２人とも 1/2 ずつになる。・・勝ち残った者は２回戦で会う相手の持ち金の２倍を持っているから、彼が勝つ確率は 2/3 、相手が勝つ確率は 1/3 、・・この論理をずっと続けていけば、最初のゲームのプレーヤーのどちらかが最後まで勝ち残る確率は、

$$1/2・2/3・3/4・4/5・\cdots\cdots・8/9・9/10 = 1/10$$

第２回戦からゲームに加わって勝ち進んだ者も、　$1/3・3/4・4/5・\cdots\cdots・8/9・9/10 = 1/10$
（第８回戦でゲームに加わる者（９人目で２連勝が必要）も、$1/9・9/10 = 1/10$）
・・１０人目の男（なぜか女ではない？）が最後に勝つ見込みは（持ち金は９：１）、相手の９に対して１であり、確率は 1/10 になる。奇妙な気はするが、このゲームは、いつ加わったとしても勝つ確率は、同じ 1/10 である。

＜法則＞　二人でコイン投げ（表、裏)のゲームに賭ける。どちらか一方が相手の持ち金をすっかり取り上げるまで続ける。勝つ確率は二人の持ち金に比例する。

証明をいろいろやってみたができず頭が発狂しそうになり、何度もあきらめかけた問です。その分、タップリ楽しめた（苦しんだ）。終わってみれば、意外で、「何だ、こんなことか」ということだった。分題形式にしましたので、（私なりの）証明にお付き合いいただき、点検をよろしく。

＜目標＞　二人の持ち金の比率が $m : n$ で、その中の 1 ずつの賭けで、どちらかの持ち金がなくなるまでゲームを続ける。最初の持ち金が m の方が勝つ確率は $p(m,n) = m/(m+n)$ であることを示す。（参考　$m \neq 0$ のとき、$p(m,0) = 1$、$p(0,m) = 0$、$p(m,n) + p(n,m) = 1$ ）

問題Ａ　$m\neq0$、$n\neq0$ で、 $m + n = 2$、3、4 のとき $p(m,n)$ をすべて求めよ。

⑴ $m + n = 2$ のとき、 $m = n = 1$ で $p(1,1) = 1/2$

⑵ $m + n = 3$ のとき、 比率の動きは、

$$\begin{array}{lllll} & \nearrow & (3,0) & \nearrow & (2,1) \\ (2,1) & \rightarrow & (1,2) & \rightarrow & (0,3) \end{array}$$

勝つ(1/2)と上へ、
敗ける(1/2)と横へ、より

$$\begin{cases} p(2,1) = (1/2)\{p(3,0) + p(1,2)\} \quad、\quad p(3,0) = 1 & \cdots① \\ p(1,2) = (1/2)\{p(2,1) + p(0,3)\} \quad、\quad p(0,3) = 0 & \cdots② \end{cases}$$

①、②を解いて、$p(2,1) = 2/3$、$p(1,2) = 1/3$

⑶ $m + n = 4$ のとき、 同様にして、

$$\begin{array}{lllllll} & \nearrow & (4,0) & \nearrow & (3,1) & \nearrow & (2,2) \\ (3,1) & \rightarrow & (2,2) & \rightarrow & (1,3) & \rightarrow & (0,4) \end{array}$$

$$\begin{cases} p(3,1) = (1/2)\{1 + (1/2)\} = 3/4 \\ p(2,2) = 1/2 = 2/4 \\ p(1,3) = (1/2)・(1/2) = 1/4 \end{cases}$$