

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

《目覚ましの問題》

<打率> 打者Aは打者Bよりシーズン前半も後半も高い打率を示したが、シーズンを通したら打者Bの打率の方が、高くなったという。そんなことがあるだろうか？

(「あるか?」と尋ねられれば、「ある」に決まっています。「例」を考えてみてください。)

<昇給> 年収が200万円あったとする。上司が、昇給の方法として次のうちどちらかを選ぶように言った。1つは、1年が終わるごとに10万円昇給するというもの。もう1つは6か月終わるごとに3万円ずつ昇給するというもの。あなたならどちらを選ぶか？

(直観では? 計算では?)

-----<問題と考察など>-----

第12章 ちょっと頭をひねってみよう

14 とても奇妙な10人勝負 (前回の続き)

<目標> 二人の持ち金の比率が $m : n$ で、その中の1ずつの賭けで、どちらかの持ち金がなくなるまでゲームを続ける。最初の持ち金が m の方が勝つ確率は $p(m, n) = m / (m+n)$ であることを示す。(参考(追加) $m, n \neq 0$ のとき、 $p(m, n) = (1/2) \{p(m+1, n-1) + p(m-1, n+1)\}$)

問題B $m \neq 0, n \neq 0$ で、 $m + n = 5, 6$ のとき $p(m, n)$ をすべて求めよ。

(i) $m + n = 5$ のとき、

↗ (5, 0) ↗ (4, 1) ↗ (3, 2) ↗ (2, 3)

(4, 1) → (3, 2) → (2, 3) → (1, 4) → (0, 5)

$$p(4, 1) = (1/2) \{1 + p(3, 2)\} \quad \therefore \quad p(3, 2) = 2 \cdot P(4, 1) - 1$$

$$p(3, 2) = (1/2) \{p(4, 1) + p(2, 3)\} \quad \therefore \quad p(2, 3) = 2 \cdot P(3, 2) - p(4, 1) = 3 \cdot P(4, 1) - 2$$

ところが、 $p(3, 2) + p(2, 3) = 1$ より、 $5 \cdot P(4, 1) - 3 = 1$ だから、

$$P(4, 1) = 4/5, \quad P(3, 2) = 3/5, \quad P(2, 3) = 2/5, \quad P(1, 4) = 1/5$$

(ii) $m + n = 6$ のとき、(i)と逆方向で、

↗ (6, 0) ↗ (5, 1) ↗ (4, 2) ↗ (3, 3) ↗ (2, 4)

(5, 1) → (4, 2) → (3, 3) → (2, 4) → (1, 5) → (0, 6)

$$p(1, 5) = (1/2) \{p(2, 4) + 0\} \quad \therefore \quad p(2, 4) = 2 \cdot P(1, 5)$$

$$p(2, 4) = (1/2) \{p(3, 3) + p(1, 5)\} = (1/2) \{(1/2) + p(1, 5)\} \quad \text{より、}$$

$$2 \cdot P(1, 5) = (1/2) \{(1/2) + p(1, 5)\} \quad 4 \cdot P(1, 5) = (1/2) + p(1, 5) \quad \therefore \quad P(1, 5) = 1/6$$

$$P(2, 4) = 2/6 = 1/3, \quad P(3, 3) = 1/2 = 3/6, \quad P(4, 2) = 1 - (1/3) = 2/3 = 4/6, \quad P(5, 1) = 1 - (1/6) = 5/6$$

問題 (本題) 問題A、Bを参考にして、 $m \neq 0$ のとき、 $p(m, 1)$ 、 $p(m-1, 2)$ 、 \dots 、 $p(1, m)$ を求めよ。

比率の動きは、

↗ (m+1, 0) ↗ (m, 1) \dots (4, m-3) ↗ (3, m-2) ↗ (2, m-1)

(m, 1) → (m-1, 2) → (m-2, 3) \dots (2, m-1) → (1, m) → (0, m+1)

$$p(m, 1) = (1/2) \{1 + p(m-1, 2)\} \quad \therefore \quad p(m-1, 2) = 2 \cdot P(m, 1) - 1$$

$$p(m-1, 2) = (1/2) \{p(m, 1) + p(m-2, 3)\}$$

$$\therefore \quad p(m-2, 3) = 2 \cdot P(m-1, 2) - p(m, 1) = 3 \cdot P(m, 1) - 2$$

$$p(m-2, 3) = (1/2) \{p(m-1, 2) + p(m-3, 4)\}$$

$$\therefore \quad p(m-3, 4) = 2 \cdot P(m-2, 3) - p(m-1, 2) = 4 \cdot P(m, 1) - 3$$

\dots

$$p(2, m-1) = (m-1) \cdot p(m, 1) - (m-2), \quad p(1, m) = m \cdot p(m, 1) - (m-1)$$

ところで、 $p(m, 1) + p(1, m) = 1$ だから、 $(m+1) \cdot p(m, 1) - m+1 = 1$

$$p(m, 1) = \frac{m}{m+1}, \quad p(m-1, 2) = \frac{m-1}{m+1}, \quad p(m-2, 3) = \frac{m-2}{m+1}, \quad \dots$$

$$\dots, \quad p(2, m-1) = \frac{2}{m+1}, \quad p(1, m) = \frac{1}{m+1}$$

(逆にたどると)

$$\begin{aligned}
p(1, m) &= (1/2) \{p(2, m-1) + 0\} \therefore p(2, m-1) = 2 \cdot P(1, m) \\
p(2, m-1) &= (1/2) \{p(3, m-2) + p(1, m)\} \\
&\therefore p(3, m-2) = 2 \cdot P(2, m-1) - p(1, m) = 3 \cdot P(1, m) \\
p(3, m-2) &= (1/2) \{p(4, m-3) + p(2, m-1)\} \\
&\therefore p(4, m-3) = 2 \cdot P(3, m-2) - p(2, m-1) = 4 \cdot P(1, m) \\
&\dots
\end{aligned}$$

一般に $p(k-1, m-k+2) = (k-1) \cdot P(1, m)$ 、 $p(k, m-k+1) = k \cdot P(1, m)$ とすると、
 $p(k, m-k+1) = (1/2) \{p(k+1, m-k) + p(k-1, m-k+2)\}$
 $p(k+1, m-k) = 2 \cdot P(k, m-k+1) - p(k-1, m-k+2) = (k+1) \cdot P(1, m)$
よって $p(m, 1) = m \cdot p(1, m)$ $p(m, 1) + p(1, m) = 1$ だから、 $(m+1) \cdot p(1, m) = 1$
 $(m+1) \cdot p(1, m) = 1$ となり、前記と同じ結果を得る。

一般に、 $p(m-k, k+1) = \frac{m-k}{m+1}$ で、一般に、 $m-k \rightarrow m$ 、 $k+1 \rightarrow n$ に置き換えれば、

$$p(m, n) = \frac{m}{m+n} \text{ を得る。}$$

1.6 パスカルの三角形 (著者に敬意を表して、最終の問題を紹介)

10人の子供がいるとして、3人が女の子、残り7人が男の子になる可能性はどうだろう。
 ...コインを10回投げて、ピッタリ3回表が出る確率はどうなるだろう。

(本では、3頁ほどの解説があり、最後にパスカルの三角形を掲示している。)

答は、 ${}_{10}C_3 / 2^{10} = 120/1024 \doteq 2/17$ である。

(本にならってパスカルの三角形 (${}_nC_r$ の表) を

10の段まで掲示した。

${}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$ を利用して、

Excel で暇つぶしに作成。)

				1		1															
				1		2		1													
			1		3		3		1												
		1		4		6		4		1											
			1		5		10		10		5		1								
				1		6		15		20		15		6		1					
				1		7		21		35		35		21		7		1			
				1		8		28		56		70		56		28		8		1	
				1		9		36		84		126		126		84		36		9	1
				1		10		45		120		252		210		120		45		10	1

「訳者あとがき」の最後の一文から。

...ダレル・ハフ (著者) は賭けに関して相当な資本を投下したことだろう。さもないとこの「確率の世界」は生まれなかったはずである。...

(本書の原題は、HOW TO TAKE A CHANCE である。)

《目覚ましの答》

(打率) 打数のアンバランスによって起こることがある。

打者	シーズン前半 (打率)	シーズン後半 (打率)	シーズン前半 (打率)
A	10打数5安打 (0.50)	10打数3安打 (0.30)	20打数8安打 (0.40)
B	15打数7安打 (0.47)	7打数2安打 (0.29)	22打数9安打 (0.41)

他の例もつくってみてください。2次元 (平面) ベクトルの和と方向の問題でもあります。

(昇給) 3万円コース

表にしてみる。

等差数列の問題になる。

		10万円コース	3万円コース	
1年目	前半	200万円	100万円	で 203万円
	後半		103万円	
2年目	前半	210万円	106万円	で 215万円
	後半		109万円	
3年目	前半	220万円	112万円	で 227万円
	後半		115万円	

n年目の終りでは、

10万円コース $200 + 10(n-1) = 190 + 10n$

3万円コース $203 + 12(n-1) = 191 + 12n$