

— 昔のプリントなど — (その1)

本棚を整理していて昔のプリントなどいくつか残っていました。タイトルは「数学相談室 (土曜日)」、「数学科 教材研究の視点」など。また、私が教育センター在職中お世話になった名大名誉教授の栗田稔先生からいただいたプリントもあります。面白そうな話題をいくつか紹介します。ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

本題に入る前に馬鹿バカシイ問題「世界のなぞなぞ のり・たまみ (文春新書)」から
 <なぞなぞの質問>

(イギリス) 「29匹のカエルは、29匹の虫を、29分で捕まえることができます。では、87分で87匹の虫を捕まえるには、何匹のカエルが必要でしょう。」

(ポーランド) 「おじいさんとおばあさんを作ったのは誰？」

(アメリカ) <子どもには解けて、大人には解けない問題>

8809 — 6	8096 — 5	8193 — 3	7111 — 0	6666 — 4
5662 — 2	1012 — 1	6085 — 4	9999 — 4	(以下略)

では、「2581 は？」

(日本) 「地球から見た月と、月から見た地球では、どちらが大きいですか。」

----- <問題と考察など> -----

(いくつかは以前の「数学散歩」で紹介しています。)

問題1 1周1kmのレース場がある。時速30kmで1周目を走った後、2周平均で時速60kmにするには、2周目を時速何kmで走ればよいか。

(答) ① 1周目は(1/30)・60=2(分)かかる。2周平均で60kmで走ると(2/60)・60=2(分)で不可能。

② 2周目を x km/時とすると、(1/30) + (1/x) = 2/60 で 1/x = 0 になり不可能。(VI-1)

問題2 (x-a)(x-b)=x²-(a+b)x+ab、(x-a)(x-b)(x-c)=x³-(a+b+c)x²-(ab+bc+ca)x-abc である。では、26個の積 (x-a)(x-b)(x-c)・・・(x-z)を展開するとどんな式になるか。

(答) 積の24個目は(x-x)=0で0になる。当たり前のことです。(VI-2)

問題3 xyz = 1 のとき、 $\frac{2x}{xy+x+1} + \frac{2y}{yz+y+1} + \frac{2z}{zx+z+1} = \square$
 □に入る数値を求めよ。

(答) (早わざ) x = y = z = 1 とすれば、(2/3)×3 = 2 (VI-5)

(くそ真面目に)

$$(解1) \text{ 与式 } = \frac{2x}{xy+x+1} + \frac{2y}{(1/x)+y+1} + \frac{2(1/(xy))}{(1/y)+(1/(xy))+1} = \frac{2x+2xy+2}{xy+x+1} = \underline{2}$$

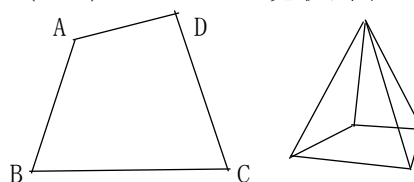
$$(解2) \text{ 与式 } = \frac{2x}{xy+x+1} + \frac{2xy}{xyz+xy+x} + \frac{2xyz}{x^2yz+xyz+xy} = \frac{2x+2xy+2}{xy+x+1} = \underline{2}$$

問題4 勝手に描いた四角形を底面とする四角錐をつくれ。

厚紙で四角形の外側に4つの四角形を適当に描いて、ハサミで切って組み立てると、三角形は2つまではつながるが、3つ目はうまくつながらない。実際やってみてください。(ヒント 問題は解けたものとせよ。)

(VII-3)

見取り図

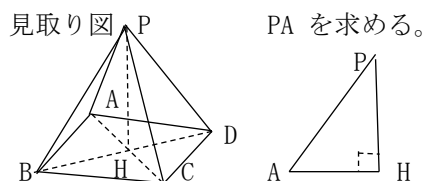


(方法の例) 四角錐ができたとする。

見取り図で、頂点 P から平面ABCD に下した垂線の足を H とする。① 四角形ABCD、② 点 H の位置、③ 垂線 PH の長さの3つが与えられれば、四角錐は決まる。

∠H = 90° である4つの三角形 APH、BPH、CPH、DPH を作図し、AP、BP、CP、DP を求めて、展開図を作ればよい。

(のりしろなどつけて、作ってみてください。暇つぶしが楽しめます。)



問題5 (コラッツの問題)

自然数を1つ考える。その数が ① 偶数なら2で割る ② 奇数なら3倍して1を足す この操作を繰り返すとどうなりますか。何か規則がありますか。

(いろいろやってみてください。)

(VI-3)

(関連して、私立中学(神奈川学園中学)の入試問題を次に紹介します。)
「やじうま入試数学 金重明(BLUE BACKS)」(全 29 問中の第 11 問として紹介)から

- (1) 最初の整数が 7 のとき、4 回操作して得られる整数を求めよ。
(2) 最初の整数が 13 のとき、何回の操作で終了するか。
(次の間には、操作として ③ 1 になったところで終了する を追加して)
(3) この操作を 7 回行くと 1 になる整数をすべて求めよ。

((3)の問題のアイデアが気に入りました。楽しめます。)

《ウォーミングアップです》

1 → 4 → 2 → 1 → 4 → 2 → 1 (以下、繰り返し)
2 → 1 → 4 → 2 → 1 (以下、繰り返し)
3 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1 (以下、繰り返し)
4 → 2 → 1 → 4 → 2 → 1 (以下、繰り返し)
5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1 (以下、繰り返し)
6 → 3 → (前述)、8 → 4 → (前述)、10 → 5 → (前述)、
7、9 についても最後は 4 → 2 → 1 の繰り返しになります。確認されたい。

「コラッツの予想」:「どんな自然数についても、いつかは $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ の繰り返しになる。」

(覈数、 10^{16} まで正しいことが確認されているとのこと。数学未解決問題の 1 つ。)

<私立中学の入試問題の答>

- (答) (1) 17 (2) 9 回
(3) (7 回を逆にたどる) $\swarrow$ 21
1 ← 2 ← 4 ← 8 ← 16 ← 32 ← 64 ← 128 より、
 $\nwarrow$ 1 × $\nwarrow$ 5 ← 10 ← 20 3、20、21、128
 $\nwarrow$ 3

(暇つぶしの楽しみ) 前記の本にあった数「27」は如何ですか?何回の操作で終了しますか?
私の計算では、77 回の操作で最大 9232 になり、101 回で 1 になりました。確認されたい。

問題 6 次の連立方程式を解け。
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 9 \\ x^3 + y^3 - z^3 = 25 \end{cases}$$

(略解) $x + y = z + 1$
 $x^2 + y^2 = z^2 + 9$ より x, y を消去して $z = 1$ 、 $(x, y, z) = (3, -1, 1), (-1, 3, 1)$
 $x^3 + y^3 = z^3 + 25$

問題 7 (4 人の女子生徒の姓名は?)
4 人の女子生徒がいます。4 人の姓は青木、馬場、千葉、出口さんで、名の方は加代、里奈、美樹、直美さんです。次の(1)~(4)により 4 人の姓名をあててください。
(1) 里奈さんの姓は馬場か千葉のどちらかです。
(2) 美樹さんの姓は青木か馬場のどちらかです。
(3) 直美さんの姓は青木か千葉のどちらかです。
(4) 馬場さんの名は加代か美樹のどちらかです。

(表にしてみる。)

	青木	馬場	千葉	出口
加代		●		
里奈		○	○	
美樹	○	○●		
直美	○		○	

馬場加代とすると 馬場美樹 × → 青木美樹
→ 青木直美 × → 千葉直美 → 千葉里奈 ×
→ 馬場里奈 となって不可。馬場美樹になる。
馬場美樹 → 青木美樹 × → 青木直美
→ 千葉直美 × → 千葉里奈 → 出口加代

問題 8 打者 A は打者 B よりシーズン前半も後半も高い打率を示したが、シーズンを通したら打者 B の打率の方が、高くなったという。そんなことがあるだろうか?

(「あるか?」と尋ねられれば、「ある」に決まっています。)(VII-7)

(答) 打数のアンバランスによって起こることがある。

打者	シーズン前半 (打率)	シーズン後半 (打率)	シーズン前半 (打率)
A	10 打数 5 安打 (0.50)	10 打数 3 安打 (0.30)	20 打数 8 安打 (0.40)
B	15 打数 7 安打 (0.47)	7 打数 2 安打 (0.29)	22 打数 9 安打 (0.41)

他の例もつくってみてください。2 次元(平面)ベクトルの和と傾き(方向)の問題でもあります。
図(平行四辺形)を描いて、確認してみてください。

<なぞなぞの答(解説など略)>

(イギリス)「29 匹」(ポーランド)「孫」(アメリカ)「2」(日本)「月から見た地球の方」