数学散歩　Ⅷ－10　　　　　　　　　　２０１８．１．β　　岐阜市　村山錞司

―　昔のプリントなど　―　　（その１０（最終））

「中学校・高等学校　数学科 教材研究の視点　愛知県教育センター」⑥

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜　問題と考察　＞

１８　$1 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq 2$ のとき不等式　$9 \leqq (a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \leqq 10$ を証明せよ。

（元の冊子では、不等式の左辺の数字が 1 になっていましたが、9 の間違いでした。）

（証明）　① b、c を定数とし、a についての関数とみる。

$$P = \left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)a + (b+c)\cdot\frac{1}{a} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} + 3$$

$$P' = \frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{b+c}{a^2} = \frac{(b+c)(a^2-bc)}{a^2bc}$$　$a=\sqrt{bc}$ のとき P は最小

$a \leqq b \leqq c$　だから　$a=b=c$ のとき最小　$P = 3a\cdot(3/a) = 9$

最大になるのは $a=1$ または $a=2$ のとき

$a=2$ のとき $b=c=2$ で、上記の最小 $P=9$

②　$a=1$ のとき c を定数、b についての関数とみる。

$$P = \frac{1}{b}+\frac{1}{c}+b+c+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+3$$

$$P' = -\frac{1}{b^2}+1-\frac{c}{b^2}+\frac{1}{c} = \frac{(c+1)(b^2-c)}{b^2c}$$

$b=\sqrt{c}$ のとき最小、、$b=1$ または 2 で最大

$$P = b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+3 \geqq 2\cdot 3+3 = 9$$

(ｲ)　$a=b=1$ のとき

$$P = 2\left(c+\frac{1}{c}\right)+5 \geqq 9$$　最小値 9 、$c=2$ で最大値 10

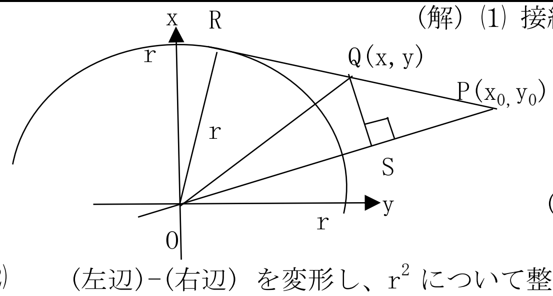
(ﾛ)　$a=1$ 、$b=c=2$ のとき $P=10$　　　　　以上より、不等式は成立する。

１９　次の⑴、⑵はともに点　(x_0, y_0)　から円　$x^2+y^2= r^2$ に引いた２本の接線の方程式を与えることを示せ。

⑴　$(xy_0 - x_0y)^2 = r^2\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\}$

⑵　$(x_0x+y_0y-r^2)^2 = (x_0{}^2+y_0{}^2-r^2)(x^2+y^2-r^2)$

また、その図形的意味（ベクトルを利用してもよい）を考えよ。



（解）⑴ 接線を $y-y_0 = m(x-x_0)$ 、$m(x-x_0)-(y-y_0) = 0$ とすると原点からの距離が r だから

$$\frac{|mx_0-y_0|}{\sqrt{m^2+1}} = r \text{、}\quad m^2(x_0{}^2-r^2)-2mx_0y_0+y_0{}^2-r^2=0$$

$m(x-x_0)=y-y_0$ により m を消去すると

$$(y-y_0)^2(x_0{}^2-r^2)-2(x-x_0)(y-y_0)x_0y_0+(x-x_0)^2(y_0{}^2-r^2)=0$$

r^2 について整理すると⑴を得る。

⑵　（左辺）－（右辺）を変形し、r^2 について整理すると⑴を得る。

（図形関係）⑴　$\triangle OPQ=(PQ\times r)/2$　∴　$|xy_0-x_0y|/2 = \{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\cdot r\}/2$

⑵　左辺＝ $(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}-r^2)^2 = (OP\cdot OQ\cos\angle POQ-r^2)^2 = (OP\cdot OS-r^2)^2$

$= \{OP\cdot(OP-PS)-r^2\}^2 = (OP^2-r^2-OP\cdot PS)^2 = (PR^2-PR\cdot PQ)^2 = PR^2\cdot QR^2$ ＝右辺

２０　円 $x^2+y^2=1$ を直線ℓに関して対称移動したら x軸に接した。このような直線ℓの存在範囲を求めよ。

（解）　原点中心、半径１の円に対称で、x軸に接するから円の中心は $(a,1)$ か $(a,-1)$ になる。

２つの円の対称軸は、中心を結ぶ線分の垂直二等分線で、片方が原点だから

(ｲ)　中心が $(a,1)$ のとき、対称軸の直線ℓは、$y=-a(x-a/2)+1$、$a^2-2ax-2y+1=0$

$D'=x^2-(-2y+1)\geqq 0$ より　$y \geqq -\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$

(ロ)　中心が (a,-1) のとき、対称軸の直線ℓは、$y=a(x-a/2)-1$、$a^2-2ax+2y-1=0$

$D'=x^2-(2y-1)\geqq 0$ より　$y \leqq \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}$

(イ)または(ロ)の部分（和集合）

２１　３次方程式 $z^3+2z^2+3z+4=0$ の解を $z=x+yi$（x、y は実数、i は虚数単位）として点 (x,y) を考える。このような点(x,y) は円 $x^2+y^2=1$ の外側に幾つあるか。（東京理科大）

（解）$f(z)=z^3+2z^2+3z+4=0$、　$f'(z)=3z^2+4z+3=3\{z+(2/3)\}^2+(5/3)>0$、f(z) は単調増加

$f(-1)=2>0$、$f(-2)=-2<0$　f(z)=0 は -2 と -1 の間に１根α、$-2<\alpha<-1$

残りの２つは虚数解 $a\pm bi$（a、b は実数）

$f(z)=(z-\alpha)(z-a-bi)(z-a+bi)$　定数項を比較して、$-\alpha(a^2+b^2)=4$

$-2<\alpha<-1$ だから、　$2<a^2+b^2<4$

よって、　円 $x^2+y^2=1$ の外側に　$(\alpha,0)$ と $(a,\pm b)$ の３個。

２２　２次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$（a、b、c は実数）がある。$|x|\leqq 1$ で $|f(x)|\leqq 1$ を満たすとき $|f'(x)|\leqq 4$ を示せ。（東京工業大）

（解）$f'(x)=2ax+b$ で f'(x) は単調増加または単調減少

$f(1)=a+b+c$、$f(-1)=a-b+c$、$f(0)=c$ より、$a=\{f(1)+f(-1)\}/2-f(0)$、$b=\{f(1)-f(-1)\}/2$

$|x|\leqq 1$ で $|f(x)|\leqq 1$ だから $-1\leqq f(-1)$、f(0)、$f(1)\leqq 1$

$f'(1)=(3/2)f(1)+(1/2)f(-1)-2f(0)$　より　$-4\leqq f'(1)\leqq 4$

$f'(-1)=-(1/2)f(1)-(3/2)f(-1)+2f(0)$　より　$-4\leqq f'(-1))\leqq 4$

f'(x) は単調だから $|f'(x)|\leqq 4$

２３　x についての方程式 $\sin x+\sqrt{a}\cos x=a$（a は定数）が実数解をもつとき、実数 a の範囲を求めよ。

（解）①　$a<0$ のとき、$\sqrt{a}$ は虚数だから、$\cos x=0$ ∴ $\sin x=\pm 1$、$a<0$ より $a=-1$

②　$a\geqq 0$ のとき、$\sqrt{a+1}\sin(x+\alpha)=a$、$\sin(x+\alpha)=\dfrac{a}{\sqrt{a+1}}$　∴　$\left|\dfrac{a}{\sqrt{a+1}}\right|\leqq 1$

よって、$a^2-a-1\leqq 0$、だから　$0\leqq a\leqq(1+\sqrt{5})/2$

①、②より、求める範囲は $\underline{a=-1}$、　$0\leqq a\leqq(\sqrt{5}+1)/2$　（冊子の答 $(\sqrt{5}-1)/2$ は誤り）

（a = -1 を忘れる。）

２４　半径 a の円柱が３本あって、それらの軸が互いに垂直に交わっているとき、共通な部分の体積を求めよ。

（x、y、z≧ 0 の部分の見取り図を描いて考えてみてください。８倍を忘れないで。）

（概略　計算式など）

$$V=\left\{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3+3\int_{a/\sqrt{2}}^{a}(a^2-x^2)\,dx\right\}\times 8=8(2-\sqrt{2})a^3$$

２５　「$a_1=1$、$a_{n+1}=\dfrac{2a_n+5}{a_n+2}$ のとき $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。」について、何故このような漸化式が出てくるのか。

（略解）$x=\dfrac{2x+5}{x+2}$ を解いて $x=\sqrt{5}$、

$$|a_{n+1}-\sqrt{5}|=\left|\frac{2a_n+5}{a_n+2}-\sqrt{5}\right|=\left|\frac{-(a_n-\sqrt{5})}{(a_n+2)(\sqrt{5}+2)}\right|<\frac{1}{8}|a_n-\sqrt{5}|\quad\text{よって}\quad\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{5}$$

＜逆用して＞　$\sqrt{5}=2.23\cdots$ より、

$\sqrt{5}=2+(\sqrt{5}-2)=2+\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}=\dfrac{2\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}+2}$　これより漸化式が出てくる。

＜また、連分数表示として＞　$\underline{\sqrt{5}}=2+\dfrac{1}{2+\underline{\sqrt{5}}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$　を得る。

２６　f(x) は微分可能とする。任意の実数 a、b について、

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{2}\{f(a)+f(b)\}$　が成り立つとき、f(x) は１次関数であることを示せ。

（解）　$\int f(x)dx = F(x)+c$ （c は積分定数）とすると、

$$F(b)-F(a) = \frac{b-a}{2}\left\{ f(a)+f(b) \right\}$$　b について微分すると

$$f(b) = \frac{1}{2}\left\{ f(a)+f(b) \right\} + \frac{b-a}{2} f'(b) \qquad \therefore\ f(a) = f'(b)(a-b) + f(b)$$

f(a) は a について１次関数

２７　$\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{8}\log 2$　を示せ。

（解）　$x = \tan\theta$　とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1+\tan^2\theta = x^2+1$

$$（左辺） = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi/4} \log\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta}d\theta$$

（ $\sin\theta+\cos\theta = \sqrt{2}\cos(\theta-\pi/4)$ ）

$$= \int_0^{\pi/4}(\log\sqrt{2} + \underline{\log\cos(\theta-\pi/4) - \log\cos\theta})d\theta = \frac{\pi}{8}\log 2$$

２８　A、B、C の３チームが試合をする。まず、A、B の２チームが対戦する。次に、その勝者と C が対戦する。以後、前の試合の勝者と残りのチームが対戦する。これを続けて、２連勝したチームを優勝とする。このときA、B、C の優勝する確率を求めよ。

（「数学散歩 Ⅳ-10（2016.5)」で扱っている。（再掲））

（略解）

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \cdots + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \cdots = \frac{2}{7} + \frac{1}{14} = \frac{5}{14}$$

$$P(C) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \cdots = \frac{2}{7}$$　A、B より C の方が $\dfrac{1}{14}$ の損

２９　n 人でジャンケンをして勝ち負けを決める。ちょうど k 回目で初めて勝負がつく（勝ち、負けの２つのグループに分かれる）確率を求めよ。

（参考　「数学散歩 Ⅳ-11(2016.5)」）

（答）⑴ n 人(A_1、A_2、A_3、・・・、A_n) を２つのグループに分ける分け方は、

A_2、A_3、・・・、A_n が A_1 と同じグループに入るかどうかで 2^{n-1} 通り、

すべて A_1 と同じグループになるのを除いて、$2^{n-1}-1$ 通り。

⑵ n 人のジャンケンの出し方は 3^n 通り。

⑶ １回で勝負のつく確率を P とすると、

A_1 のグループの出し方は 3 通り、 A_1 以外のグループの出し方は 2 通り。

よって求める確率は　$P = \dfrac{(2^{n-1}-1)\cdot 3\cdot 2}{3^n} = \dfrac{2^n-2}{3^{n-1}}$

ちょうど k 回目で初めて勝負がつく確率は

$$(1-P)^{k-1}p = \left(1 - \frac{2^n-2}{3^{n-1}}\right)^{k-1} \cdot \frac{2^n-2}{3^{n-1}}$$

（参考）　勝負がつくまでの平均回数は、 平均回数を S とすると、

$$\begin{array}{rl} & S = 1\cdot P + 2\cdot(1-P)\cdot P + 3\cdot(1-P)^2\cdot P + \cdots + n\cdot(1-P)^{n-1}\cdot P + \cdots \\ -) & (1-P)\cdot S = (1-P)\cdot P + 2\cdot(1-P)^2\cdot P + \cdots + (n-1)\cdot(1-P)^{n-1}\cdot P + \cdots \\ \hline & PS = P + (1-P)\cdot P + (1-P)^2\cdot P + \cdots + (1-P)^{n-1}\cdot P + \cdots \end{array}$$

$$= \frac{P}{1-(1-P)} = 1$$　だから、　$S = \dfrac{1}{P} = \dfrac{3^{n-1}}{2^n-2}$