数学散歩　Ⅷ－3　　　　　　　　　　　２０１７．１０．α　　岐阜市　村山錞司

―　昔のプリントなど　―　　　（その３）

「等面四面体」：栗田稔先生（名大名誉教授）からいただいたコピー(B4 2枚）の紹介－①

昔、県教育センター在籍中、先生には研修講座の講師としていろいろお世話になりました。当時、私がまとめた 60p 弱の小冊子（ﾌﾟﾘﾝﾄ）「数学科 教材研究の視点」をお送りしたところ、いくつかのご感想、ご助言のお便りと併せて資料(4p のコピー）をいただきました。

「数学の並木道 等面四面体 栗田稔」（数学セミナーへの寄稿と思われます。）について、私なりの解釈も入れご指摘の問題も併せて紹介します。空間図形の問題で楽しめると思います。

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

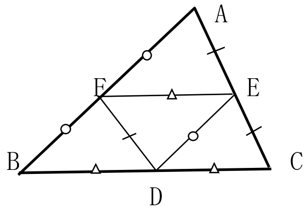
＜「数学科 教材研究の視点」でご指摘いただいた問題と答（原文のまま）＞

問題α　　（岐阜大－改）

△ABC の３辺の長さを BC = 2a、CA = 2b、AB = 2c とする。３辺 BC、CA、AB の中点をそれぞれ D、E、F とし、△ABC を線分 DE、EF、FD で折って四面体を作ることを考える。

①　　四面体ができるための条件を求めよ。

②　　四面体ができるとき、その体積を求めよ。



①が岐阜大の問題である。

四面体ができたとすると、１つの頂点に集まる３つの角の大きさは、どの頂点においても∠A、∠B、∠C である。

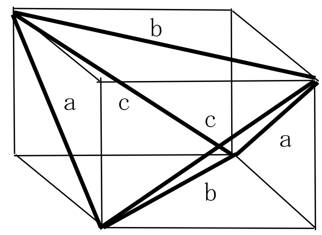
∠A、∠B、∠C が四面体の１つの頂点に集まる３つの角になるための条件は、３つの角のうちどの２つの角の和も残りの１つの角より大であることである。（これは三角形の成立条件と全く同じである。）

即ち、 ∠A ＜∠B ＋ ∠C　　∴　　2∠A ＜∠A ＋ ∠B ＋ ∠C = 180°

だから　　∠A ＜ 90°　同様に　　∠B ＜ 90°　、 ∠C ＜ 90°

よって求める条件は、△ABC が鋭角三角形であることである。

②はまともに考えようとすると大変である。



３組の平行な２面の長方形の対角線の長さがそれぞれ a、b、c である直方体を考えれば、その対角線を適当に結んでできる四面体が求めるものである。

よって、その体積 V は　　$T = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$　　とおけば

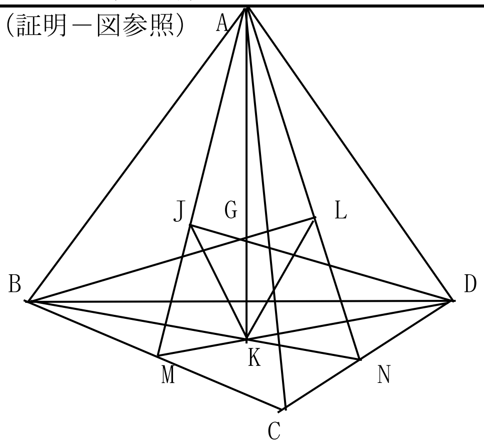
$$V = \frac{1}{3}xyz = \frac{1}{3}\sqrt{(T - a^2)(T - b^2)(T - c^2)}$$

（ヘロンの公式に似ている。）

＜コピー（以下「「原文」）の紹介と考察など＞

問題１＜重心＞　四面体で各頂点と向かい合った面（三角形）の重心を結ぶ４つの線分は１点で交わり、各線分はこの点で３：１の比に分けられる。この点を四面体の重心という。

（証明－図参照）



四面体ABCD で、△BCD、△ACD、△ABC の重心を K、L、J、辺BC、CD の中点を M、N とする。

△MAD で　AM = 3JM、DM = 3KM

∴　　AD = 3JK、AD∥JK

AK と DJ の交点を G とすると

AG ： GK = DG ： GJ = ３ ： １

△NAB で　AN = 3LN、BN = 3KN

∴　　AB = 3LK、AB∥LK

AK と BL は AG ： GK = BG ： GL = ３ ： １

より同じ点G で交わる。

点C と△ABD の重心を結ぶ線分についても同様。

＜外心＞　四面体ABCD に外接する球面（外接球）の中心 O を外心という。

：辺AB、AC、AD の垂直二等分面（三平面）の交点： OA = OB = OC = OD

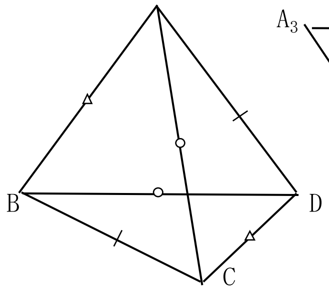
（線分の垂直二等分面とは、線分の中点を通り線分に垂直な平面）

＜内心＞　四面体ABCD の中にあって４つの面に接する球面（内接球）の中心 I を内心という。

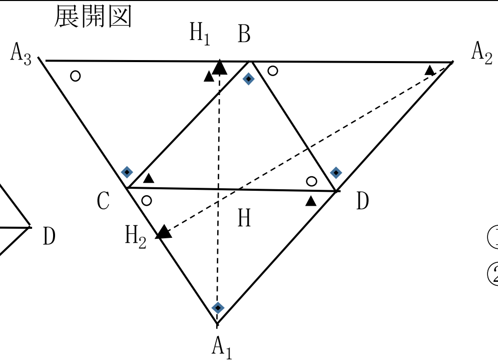
：四つの面への等距離の点：辺BC、CD、DB のところにできる（３つの）二面角（半平面BCA と BCD、CDA と CDB、DBA と DBC）を二等分してできる３平面の交点

＜等面四面体＞　四面体ABCD で対辺同士の３つの組が AB = CD、AC = DB、AD = BC のとき等面四面体という。（４つの面が合同で、各頂点の３つの角の和は 180°）

見取り図



展開図



問題αの四面体が等面四面体である。

（解説）

四面体ABCD をAB、AC、AD で切って展開する。

① 頂点A → A_1、A_2、A_3

② $\triangle A_1A_2A_3 \backsim \triangle A_1DC \equiv \triangle DA_2B \equiv \triangle CBA_3 \equiv \triangle BCD$

《栗田先生からご指摘いただいたこと》

冒頭の問題αの①について、「鋭角三角形であること」が「必要条件である」ことはいいが「十分条件である」ことが示されていない。

（先生の原文の概要）　展開図から四面体を組み立てる。（前図参照）

① 辺CD を軸として$\triangle A_1CD$ を折り曲げる（0°→180°）。　移動中、頂点A_1 から平面BCD に下した垂線の足は、A_1 から辺A_2A_3 に下した垂線A_1H_1 上を $A_1 \to H_1$ と移動する。

② 辺BD を軸としてA_2 についても同様にすれば、$A_2 \to H_2$ と移動し、A_1H_1 と A_2H_2 は $\triangle A_1A_2A_3$ の垂心 H で交わり、四面体の頂点 A から平面BCD に下した垂線の足になる。頂点A_3 についても同様である。

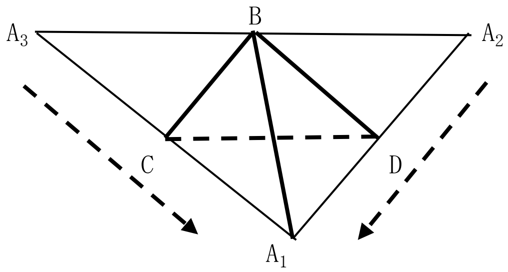
③ 点 H が$\triangle A_1A_2A_3$ の中にあることから $\triangle A_1A_2A_3$ は鋭角三角形である。

（村山ー（注）鋭角三角形であれば四面体に組み立てられる。）

（原文から）　等面四面体はすべてこのようにして得られます。つまり、任意の鋭角三角形$\triangle A_1A_2A_3$ で各辺の中点を前の図のようにB、C、D とし、・・・$\triangle A_1CD$ を CD を軸として回転し、$\triangle A_2DB$ を DB を軸として回転しますと A_1 と A_2 は A_1H_1 と A_2H_2 の交点 H で平面BCD に立てた垂線の上で重なります。この点を A としますと、$\triangle A_3BC$ と$\triangle ABC$ は合同となり、BC を軸とする回転でA_3 が A に重なります。

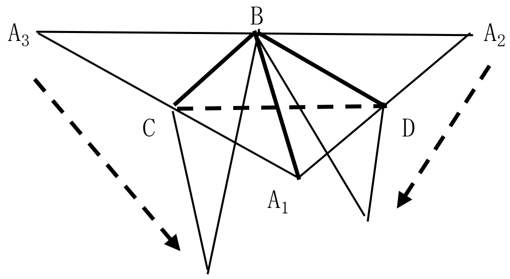
＜展開図が鋭角三角形ではない場合を考えてみた。＞

直角三角形の場合



$A_2 \to A_1$ 、$A_3 \to A_1$ で長方形BCA_1D(平面図形) になる。

鈍角三角形の場合



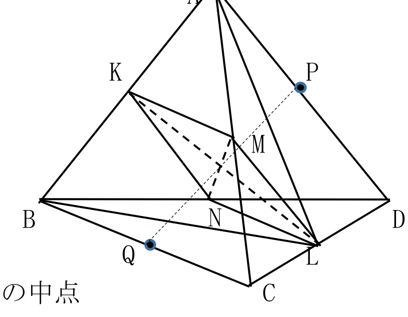
BD、BC で折っても A_2 と A_1 、A_3 と A_1 は くっつかない。

＜等面四面体の性質＞

問題２（図参照）等面四面体について、次のことを証明せよ。

⑴ １組の対する辺 AB、CD の中点 K、L を結ぶ線分 KL は AB、CD に垂直である。

⑵ ３組の対する辺 AB と CD、AC と DB、AD と BC の中点を結ぶ線分（KL、MN、PQ）では中点が一致し、２つずつ垂直である。



（略証）⑴ $\triangle ACD \equiv \triangle BDC$、L は CD の中点だから、$\triangle ACL \equiv \triangle BDL$ ∴ AL = BL、K は二等辺三角形LAB の底辺AB の中点だから、KL ⊥ AB、同様に KL ⊥ CD

⑵ KM = NL = BC/2、KN = ML = AD/2 で BC = AD より、四角形KMLN はひし形で、対角線 KL と MN は中点で直交する。KL と PQ、MN と PQ についても同様。