数学散歩　Ⅷ－４　　２０１７．１０．β　　岐阜市　村山錞司

―　昔のプリントなど　―　　（その４）

「等面四面体」：栗田稔先生（名大名誉教授）からいただいたコピー(B4 2枚）の紹介－②

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜ウッカリしていた問題＞

四面体に垂心はあるか？

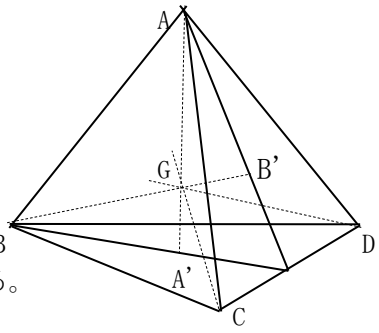
この件についてのコメントは、栗田先生のコピーには見当たりませんでした。

＜裏の家のウルさいワンちゃん＞

「たまにはツーといえ」・・・「ワン、ワン」、ウルさいので「５－１は」・・・沈黙　？

＜コピー（以下「「原文」）の紹介と考察など＞

＜等面四面体の性質(続き）＞



問題３　　等面四面体では、重心、外心、内心はすべて一致する。
これを証明せよ。

（略証）　△ABC ≡△BAD ≡△CDA ≡△DCB の４つの三角形の重心をそれぞれ D'、C'、B'、A' とする。

（外心）　４つの四面体 ABCD、BADC、CDAB、DCBA は合同だから、AA'=BB'=CC'=DD' で問題１（「Ⅷ-3」）より四面体の重心 G は　各線分を３：１の比に分けるから、AG=BG=CG=DG で G は外心になる。

（内心）　同様に、AA'= 4GA' だから、

（四面体ABCD の体積）　= 4×（四面体GBCD の体積）

他も同様で、G から４つの各面に下した垂線の長さの４倍が四面体の高さになる。

４つの各面の面積が等しいから、G から各面に下した垂線の長さが等しくなり、

重心 G は内心になる。

よって、重心、外心、内心は一致する。

＜（原文から）　問題３は次のような形で逆も成り立つ＞

四面体の重心、外心、内心のうち２つが一致すれば等面四面体である。

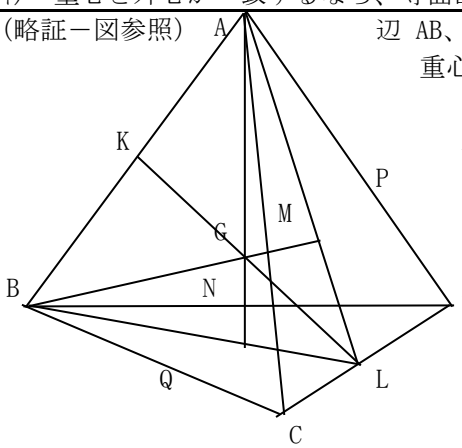
（本文から）証明はそうやさしくはない。ことに「内心と外心が一致する」場合は難しい。また、「４つの面の面積が等しければ重心と内心が一致する」から「４つの面が等面積ならば合同」であるともいえるわけです。（下線、「　」などは私が付記）

（原文には証明がない。いろいろやってみたが？？？）

＜少し挑戦してみた＞

(ｲ)　重心と外心が一致するなら、等面四面体である。

（略証－図参照）　A



辺 AB、CD、AC、BD、AD、BC の中点を K、L、M、N、P、Q とする。

重心 G が外心だから、AG = BG = CG = DG より、

（ G は△ABL、△CDK、・・・上で）

AL = BL、CK = DK、AN = CN、BM = DM、AQ = DQ、BP = CP

AB = b、AC = c、AD = d、CD = x、BD = y、BC = z

とすれば、

$c^2+d^2 = AC^2+AD^2 = 2(AL^2+CL^2)$

$= 2(BL^2+CL^2) = BC^2+BD^2 = z^2+y^2$

同様に、　$d^2+b^2 = x^2+z^2$　、　$b^2+c^2 = y^2+x^2$

$x^2+y^2+z^2 = b^2+c^2+d^2$　　∴ x=b、y=c、z=d

よって、等面四面体になる。

(ﾛ)　４つの面の面積が等しければ重心と内心が一致する。

（略証）　４つの面の面積を S、四面体の体積を V とし、重心 G から４つの面への距離を a'、b'、c'、d' とすると、V = 4・{(1/3)・a'・S} = ・・・= 4・{(1/3)・d'・S}

だから、　a' = b' = c' = d'　で G は内心になる。

＜残る問題＞

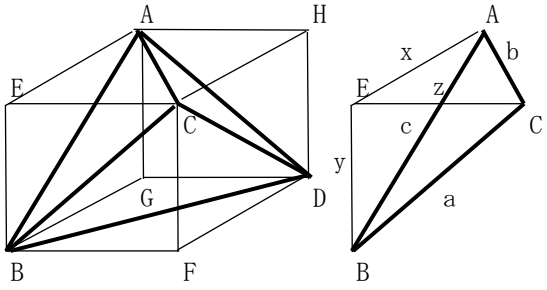
(ﾊ)　(ﾛ)のとき外心も一致する。　　(ﾆ)　内心と外心が一致するとき重心も一致する。

(ﾎ)　４つの面が等面積ならば合同である。

（証明できず、残念。何かヒントなどがあればよろしく。）

《等面四面体と直方体》－栗田先生ご指摘の問題α（「Ⅷ-3」）の残っている問題⑵から

⑴ 等面四面体ABCD ができるための条件－鋭角三角形であること
⑵ 等面四面体ABCD の体積 V を求めよ。



（先生のプリントから）
「等面四面体は直方体の中に眠っている」

等面四面体ABCD、BC=AD=a、CA=BD=b、AB=CD=c の体積 V を求める。

直方体AECH-GBFD から４つの(E、F、G、H を頂点とする E-ABC など）三角錐を除く。
AE=x、EB=y、EC=z とする。（左図）

$\begin{cases} x^2+y^2=c^2 \\ y^2+z^2=a^2 \\ z^2+x^2=b^2 \end{cases}$ より $x^2+y^2+z^2=(a^2+b^2+c^2)/2=T$ とおくと

$x^2=(b^2+c^2-a^2)/2=(b^2+c^2+a^2)/2-a^2=T-a^2$

同様に、$y^2=T-b^2$ 、$z^2=T-c^2$

△ABC の内角を A、B、C とすれば、

$\cos A=(b^2+c^2-a^2)/(2bc)$、 $\cos B=(c^2+a^2-b^2)/(2ca)$、 $\cos C=(a^2+b^2-c^2)/(2ab)$

ゆえに 正数 a、b、c が与えられたとき、
各面の対角線の長さが a、b、c である直方体ができる
⇔ 正数 x、y、z（縦、高さ、横）が存在する ⇔ △ABC は鋭角三角形である

＜等面四面体ABCD の体積 V ＞

$$V=xyz-4\cdot\frac{xyz}{6}=\frac{xyz}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{(T-a^2)(T-b^2)(T-c^2)}$$

（先生のコピーでは） $$V=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}$$

（注）正四面体では、a = b = c だから $V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

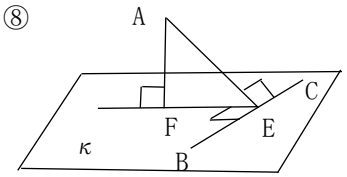
《直稜四面体（垂心四面体）》 （原文にはきちんとした定義がないため次を紹介）
「垂心四面体（直稜四面体）」 数学小辞典（矢野健太郎）より

四面体ABCD において、２組の対辺 AB と CD、BC と AD が互いに垂直ならば、残りの１組の対辺 AC と BD も互いに垂直である。このような四面体を垂心四面体という。垂心四面体では、各頂点から対面へ下した垂線は１点で交わる。

（コピー（原文）では、この項は２０行ほどの短い説明だけで証明はない。私の解釈、証明と追加事項などを記述する。）証明等は頭が狂いそうになりますが、お付き合いください。

① 四面体ABCD で各頂点から対面に下した垂線が１点 H で交わるとき、四面体ABCD を直稜四面体、H を垂心という。このとき、AB⊥CD、AC⊥BD、AD⊥BC である。
② 空間で２直線が垂直とは、１点から両方に（を通り２直線に）平行に引いた２本の直線が垂直になっていることである。
③ （①の逆）四面体ABCD で AB⊥CD、AC⊥BD ならば AD⊥BC である。このとき各頂点から対面に下した垂線は１点 H で交わり、四面体の垂心である。
④ ①で、AH、BH、CH、DH が対面と交わる点は、対面の三角形の垂心である。
⑤ AB、AC、AD が２つずつ垂直な四面体は直稜四面体の特別な場合で、三直角四面体という。
（明らかに、AB⊥CD、AC⊥BD、AD⊥BC になる。）

《空間における直線と平面の垂直関係について》
昔の教科書「数学Ⅰ 幾何編（数研 昭和33年3月1日発行 定価104円）」 から関連事項を抜粋
⑥ 相交わる２直線 a、b に垂直な直線（a、b の交点を通るとは限らない）は、a、b の定める平面に垂直である。
⑦ 直線ℓが平面κ上のすべての直線に垂直のときℓは平面κに垂直であるといい、ℓ⊥κで表し、ℓを平面κの垂線という。
⑧



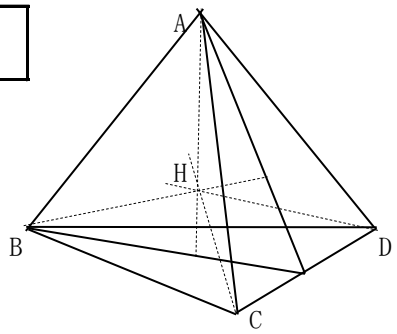
（三垂線の定理）

平面κ上にない点 A から、κ上の任意の直線 BC に垂線 AE を下し、κ上で BC に垂線 EF を引き、A から垂線 AF を下すと、AF はκに垂直である。

（略証）BC⊥AE、BC⊥FE→BC⊥平面AFE→AF⊥BC、
また、AF⊥FE ∴ AF⊥平面κ

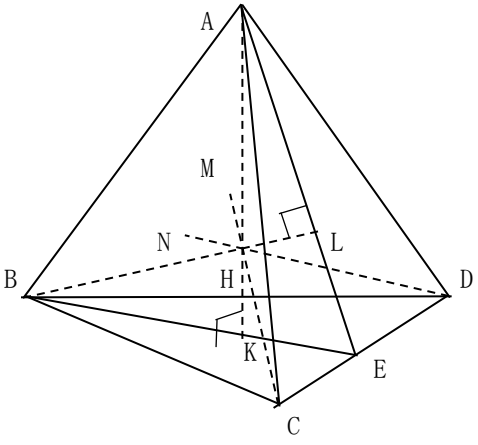
＜①～⑤の証明など＞

① 四面体ABCD で各頂点から対面に下した垂線が１点 H で交わるとき、AB⊥CD、AC⊥BD、AD⊥BC



BH⊥面ACD より BH⊥AC、CD、AD
CH⊥面ABD より CH⊥AB、BD、AD
DH⊥面ABC より DH⊥AB、BC、AC
から
AB⊥CH、DH より AB⊥面CDH ∴ AB⊥CD
AC⊥BH、DH より AC⊥面BDH ∴ AC⊥BD
AD⊥BH、CH より AD⊥面BCH ∴ AD⊥BC

③ 四面体ABCD で AB⊥CD、AC⊥BD ならば AD⊥BC である。このとき各頂点から対面に下した垂線は１点 H で交わり、四面体の垂心である。
④ ①で、AH、BH、CH、DH が対面と交わる点は、対面の三角形の垂心である。



《 A → K（△BCD）》
頂点A から平面BCD に垂線AK を下す。
AK⊥面BCD …⑨ より AK⊥BC、CD、BD
CD⊥AB、AK より CD⊥面ABK …⑩ ∴ BK⊥CD
BD⊥AC、AK より BD⊥面ACK …⑪ ∴ CK⊥BD
よって、点 K は△BCD の垂心…⑫ ∴ DK⊥BC
BC⊥AK、DK より BC⊥面ADK …⑬ よって AD⊥BC

《 B → L（△ACD）》
BK と CD の交点を E とし、B から AE に垂線 BL を下し、AK との交点を H とする。
B(H)L⊥AE。CD⊥面ABK…⑩ より CD⊥AL、BL
BL⊥CD、AE だから BL⊥面ACD…⑭ ∴ BL⊥AD
また BC⊥AD より AD⊥面BCL…⑮ ∴ CL⊥AD
AL⊥CD で CL⊥AD だから L は△ACD の垂心…⑯

《 C → M（△ABD）》
CH と面ABD との交点を M とする。
M は面BCL 上で、AD⊥面BCL…⑮よりAD⊥BM、CM
M は面ACK 上で、BD⊥面ACK…⑪よりBD⊥AM、CM
AM⊥BD で BM⊥AD だから M は△ABD の垂心…⑰
で CM⊥面ABD…⑱

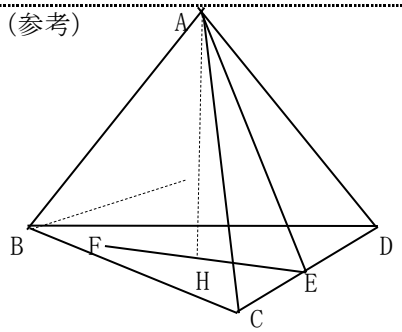
《 D → N（△ABC）》
DH と面BCD との交点を N とする。
AK⊥面BCD…⑨より AK⊥BE また BL⊥AE
よって H は△ABE の垂心。よって EH⊥AB
また、CD⊥AB より AB⊥面CDN ∴ AB⊥CN、DN
BC⊥面ADK(N) ∴ BC⊥AN、DN
CN⊥AB で AN⊥BC だから
N は△ABC の垂心…⑲ で DN⊥面ABC…⑳

《以上から》
③ 各頂点から対面に下した垂線は1点 H で交わり（⑨、⑭、⑱、⑳）、④ それらの垂線の足は各面の垂心（⑫、⑯、⑰、⑲）である。

＜ウッカリしていた問題＞

一般に、四面体に垂心はない。（三角形の垂心に相当すものは一般の四面体には存在しない。）

（参考）



① 点A から面BCD に垂線AH を下す。
(ｲ) 点A から辺CD に垂線AE を引く。 AE ⊥ CD
(ﾛ) 面BCD 上で辺CD に垂線EF を引く。 EF ⊥ CD
(ﾊ) 点A からEF に垂線AH を引く。 AH ⊥ EF
AE ⊥ CD 、 EF ⊥ CD → 面AEF ⊥ CD → AH ⊥ CD
AH ⊥ CD 、 AH ⊥ EF → AH ⊥ 面BCD
ところが、EF は点B を通るとは限らない。
通れば、AB ⊥ CD ・・・垂心四面体・・・
② 点B から面ACD への垂線がAH と交わるとは限らない。

（空間座標における例：図略）
A(0,0,1)、B(1,0,0)、C(0,1,0)、D(0,-1,0) とすれば、
z 軸上の点A から面BCD（xy平面）への垂線は AO（z軸）
x 軸上の点B から面ACD（yz平面）への垂線は BO（x軸）
で、原点O で交わる。
ところが、CO、DO は対面と垂直にならない。

＜裏の家のウルさいワンちゃん＞
「５－１は」・・・シーッ ！！