数学散歩　Ⅷ－５　　　　　　　　　２０１７．１１．α　　岐阜市　村山鋅司

―　昔のプリントなど　―　　　（その５）

「中学校・高等学校　数学科 教材研究の視点　愛知県教育センター」

（センター在籍中にまとめ、藁半紙に印刷したプリントの６０頁弱の冊子）　①

（表紙から）　研修講座などで扱った問題や話題など、教材研究を進める上で、参考になりそうなもの、生徒の興味をひきそうなものを幾つかまとめてみました。・・・平成元年3月31日

昔の資料でカビが生えているかもしれませんが、頭の体操や暇つぶしの楽しみになりそうな問題などを幾つか紹介します。

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜数学以外の話題２つ＞

話題１「ＱＷＥＲＴＹＵＩＯＰ」とは何か分かりますか。また、何故こうなったのでしょうか。

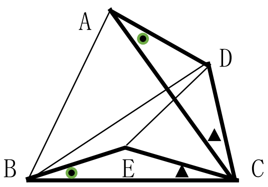
〔解説〕標準的なパソコンのキーボードの１列で、ＱＷＥＲＴＹ配列と呼ばれている。1870年代、タイプライターの会社に利用者から、速く打ち過ぎるとキーが絡むという苦情が寄せられた。（当時のタイプライターはタイピストの速さについていけなかった。）技術者たちはいろいろ検討し、速く打てなくするためにキーボードの配列をかなり非能率にした。現在のパソコンのキーボードは、打ち手の速さに十分対応できるが、相変わらずＱＷＥＲＴＹ配列になっている。

話題２　＜２匹の蛙＞　あるとき２匹の蛙がクリームの入ったバケツに落ちた。最初の蛙は、白い液体の中ではどんな足場も得られないと思い、運命に甘んじて、溺れ死んだ。

２匹目の蛙はそのような態度はとらなかった。彼はクリームの中でもがきはじめ、何とかして沈むまいとした。そのうちに、彼がさんざん暴れたおかげで、クリームがバターに変わり、彼は外へ飛び出すことができた。

＜問題、考察など＞

《（拡大、縮小した相似）三角形の点のまわりの回転を利用した問題》



＜例題＞　「トレミーの定理（の拡張）」

平面上の四角形ABCD において、AB・DC ＋ AD・BC ≧ AC・BD

等号は４点 A、B、C、D が同一円周上にあるとき成立する。

（略証）　△ABC を拡大（縮小）して、点 C のまわりに回転し△DEC となるように点 E をとる。△ABC ∽ △DEC より、

BC : AC ＝ EC : DC 、∠ACB ＝ ∠DCE より∠ECB ＝ ∠DCA　∴　△BCE ∽ △ACD

△BDE において、BE ＋ DE ≧ BD ・・・①

△ABC ∽ △DEC　→ AB : AC ＝ DE : DC　　　△BCE ∽ △ACD　→ BC : BE ＝ AC : AD

∴　$DE = \dfrac{AB \cdot DC}{AC}$　　　∴　$BE = \dfrac{AD \cdot BC}{AC}$

①に代入して、分母の AC をかければ、不等式 AB・DC ＋ AD・BC ≧ AC・BD を得る。

等号は、B、D、E が一直線上にあって∠BAC ＝ ∠EDC ＝ ∠BDC だから４点 A、B、C、D が同一円周上にあるとき成立する。

（参考）複素平面を利用した証明（「数学散歩⑵」　２０１３．８）

４点を複素数 z_1、z_2、z_3、z_4 とすると、

$|z_1 - z_2|\cdot|z_3 - z_4| + |z_1 - z_4|\cdot|z_2 - z_3| \geqq |z_1 - z_3|\cdot|z_2 - z_4|$　である。

（証明の概略）

①　平行移動して、　$z_4 = 0$ とすると不等式は

$|z_1 - z_2|\cdot|z_3| + |z_1|\cdot|z_2 - z_3| \geqq |z_1 - z_3|\cdot|z_2|$

②　$z_1\cdot z_3 = \alpha$　、　$z_2\cdot z_3 = \beta$　、　$z_1\cdot z_2 = \gamma$　とおくと、

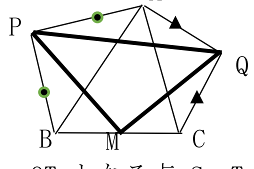
$|\alpha - \beta| + |\gamma - \alpha| \geqq |\gamma - \beta|$ 前記の例題の①と同じ。

（$|\gamma| + |\delta| \geqq |\gamma + \delta|$ と同じでもある。）

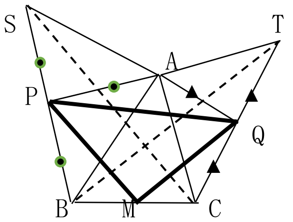
《相似三角形の回転の問題３題》

問題１（甲陽学院）

鋭角三角形ABC の外側に２つの直角二等辺三角形PAB、QAC（∠P=∠Q=90°）を作る。辺BC の中点を M とすると、△MPQ は∠Mが直角の直角二等辺三角形である。



（略証）　①　BP、CQ 上に BP ＝ PS、CQ ＝ QT となる点 S、T をとる。△ABP、△ACT は∠A が直角の直角二等辺三角形

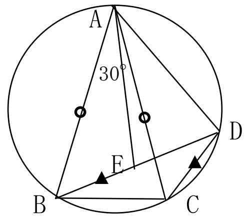


②　点 A のまわりに△SAC を90°回転すると、△BAT になり、SC ⊥ BT。

③　$PM = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{BT}{2} = QM$ 、∠PMQ ＝ 90°

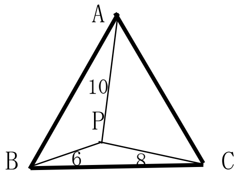
△MPQ は直角二等辺三角形である。

問題２（中央大杉並）
AB = AC、∠BAC = 30° の二等辺三角形ABC の外接円の周上に点 D をとり、BD 上に CD = BE なる点 E をとる。∠AED の大きさを求めよ。

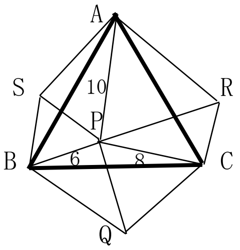


（略証）① △ABE を点 A のまわりに回転して△ACD
② △AED は△ABC を点 A のまわりに縮小して回転した三角形
よって、∠AED = ∠ABC = (180° - 30°)/2 = 75°

問題３
正三角形の内部に点 P があり、AP = 10cm、BP = 6cm、CA = 8cm のとき、△ABC の面積は何cm^2 か。



（略解）⓪ △ABP を点 A のまわりに回転し辺AC の外側に△ACR、同様に、△BQC、△ABS をつくる。



① △BPS、△CPQ、△APR はそれぞれ一辺の長さが、6cm、8cm、10cm の正三角形で、その面積の和は、

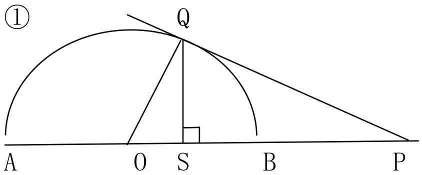
$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\sqrt{3} + \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4\sqrt{3} + \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 5\cdot 3\sqrt{3} = 50\sqrt{3}$ (cm^2

② △ASP、△QPB、△PCR は3辺の長さが、8cm、6cm、10cm の直角三角形。
３個の面積の和は、 $3\cdot(1/2)\cdot 6\cdot 8 = 72$ (cm^2)
よって、△ABC の面積は （①＋②）／2 = $36 + 25\sqrt{3}$ (cm^2)

（別解（概略））（座標を利用）
$A(0,\sqrt{3}a)$、$B(-a,0)$、$C(a,0)$ とおくと面積は、$\sqrt{3}\cdot a^2$ (cm^2)
$P(x,y)$ とおくと、$AP^2 = x^2 + (y-\sqrt{3}a)^2 = 100$ …(、 $BP^2 = (x+a)^2 + y^2 = 36$ …②、
$CP^2 = (x-a)^2 + y^2 = 64$ …③ ①、②、③より x、y を消去して、
$a^4 - 50a^2 + 193 = 0$ $a > 5$ より、$a^2 = 25 + 12\sqrt{3}$ 面積は $36 + 25\sqrt{3}$ (cm^2)

《相加平均、相乗平均、調和平均》 長さ a、b の２線分について
次の３つの図で、それぞれ平均はどこに現れるか？

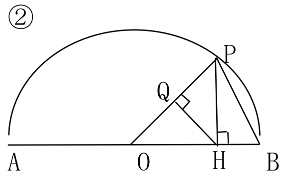
①



AP = a、BP = b

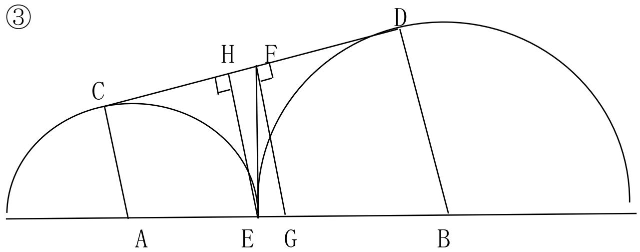
相加平均 $s = \frac{a+b}{2}$
相乗平均 $p = \sqrt{ab}$
($p^2 = ab$)
調和平均 $h = \frac{2ab}{a+b}$
$\left(\frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

②



AH = a、BH = b

③



AE = a、BE = b

（解）

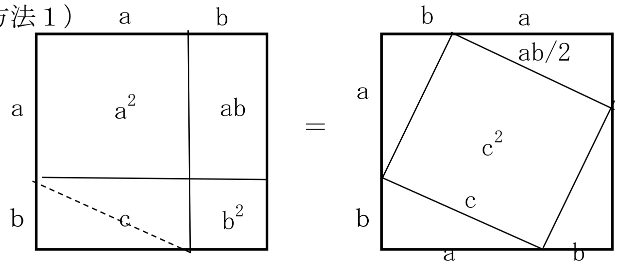
	相加平均(s)	相乗平均(p)	調和平均(h)
①	OP	PQ	PS
②	OP = OA = OB	PH	PQ
③	FG = AG = BG	FE = CF = DF	HE

（参考） ① △OPQ ∽ △PQS
② △OPH ∽ △PHQ
③ △AFE ∽ △FBE
△GFE ∽ △FEH

（点検、確認をよろしく）

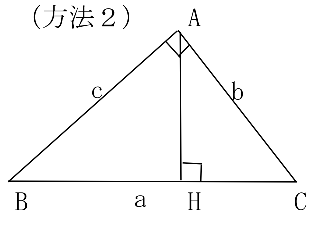
《三平方の定理の証明：２通り》 いろいろな方法を考えてみてください。

（方法１）



$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + \{(ab)/2\}\cdot 4$
∴ $a^2 + b^2 = c^2$

（方法２）



△ABC ∽ △HAC ∽ △HBA で
面積比は相似比の二乗だから
△ABC = △HAC + △HBA
∴ $a^2 = b^2 + c^2$