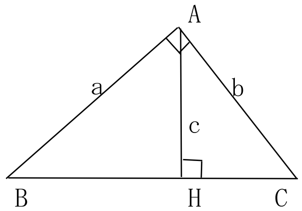
―　昔のプリントなど　―　　　（その６）
「中学校・高等学校　数学科 教材研究の視点　愛知県教育センター」②
ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題、考察など＞

《３つの線分の長さ a、b、c の関係》
問題　次の各図において、３つの線分の長さ（角の大きさ） a、b、c の関係について証明せよ。

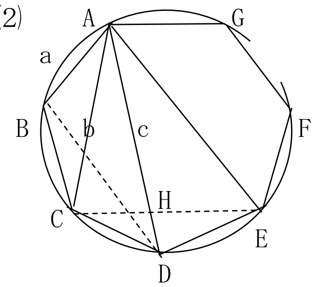
⑴


∠A が直角である直角三角形ABC の頂点 A から対辺BC に下した垂線の足を H とする。AB = a、AC = b、AH = c のとき、

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

（略証）　△ABC の面積より

$$ab = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot c$$

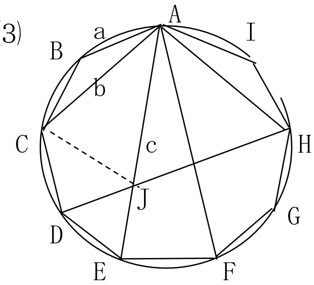
⑵


正７角形ABCDEFG で、AB = a、AC = b、AD = c のとき、

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

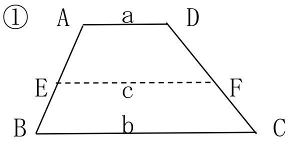
（略証）　AD と CE の交点を H とする。
△ADE ∽△ACH ∽△EHD、DE = HE = a、CE = c
より　c:a = b:(b−a)　　ab = c(b−a)

$$\frac{1}{c} = \frac{b-a}{ab} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

⑶


正９角形ABCDEFGHI で AB = a、AC = b、AE = C のとき、
$c = a + b$
（略証）　AE と DH の交点を J とする。
△AJH と△DJEは正三角形で
EJ = DE = AB = a、
AJ = AH = AC = b
AE = AJ + JE

⑷　　AD // BC の台形ABCD において

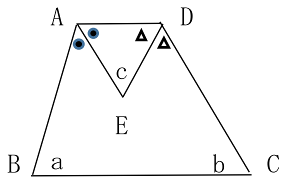
①


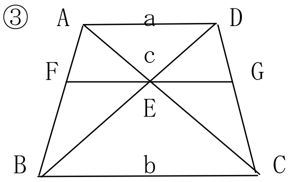
底辺BC に平行な線分EF が台形の面積を２等分するとき AD = a、BC = b、EF = c とすると、

$$c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$ （２乗平均）

②　∠A、∠D の２等分線の交点を E とする。
∠B = a、∠C = b、∠AED = c とすると、

$$c = \frac{a + b}{2}$$ （相加平均）



③


対角線AC、BD の交点を E とし、点E を通り辺BC に平行な直線が辺AB、DC と交わる点をF、G とする。
AD = a、BC = b、FG = c とすると、

$$\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$ （調和平均）

（略証）　① AD＜BC として、AB と CD の交点を G とすると、
△GAD∽△GBC∽△GEF 、３つの三角形は辺の比が a:b:c で、面積の比が $a^2:b^2:c^2$ だから、
台形AEFD = 台形EBCF　より、　$b^2 - c^2 := c^2 - a^2$

②
$$\frac{\pi - a}{2} + \frac{\pi - b}{2} + c = \pi$$

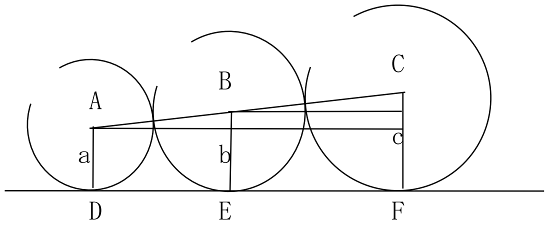
③　FE = EG = FG/2 = c/2

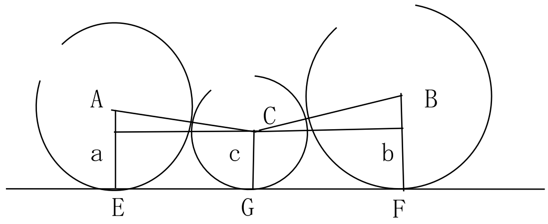
$$1 = \frac{AF}{AB} + \frac{FB}{AB} = \frac{FE}{BC} + \frac{FE}{AD} = FE \cdot \left(\frac{1}{BC} + \frac{1}{AD}\right) = \frac{c}{2} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

⑸　　３つの円 A、B、C の半径を a、b、c とする。

① $b = \sqrt{ac}$　（相乗平均）

② $\dfrac{1}{\sqrt{c}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{b}}$





（略証）　$\dfrac{b-a}{a+b} = \dfrac{c-b}{b+c}$　　∴ $b^2 = ac$

$EG = \sqrt{(a+c)^2 - (a-c)^2} = 2\sqrt{ac}$

同様に、$FG = 2\sqrt{bc}$、$EF = 2\sqrt{ab}$

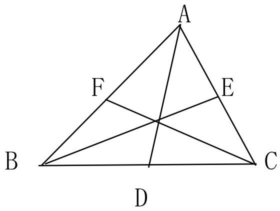
$EF = EG + FG$

《三角形の３中線》

問題　△ABC の３本の中線を AD = ℓ、BE = m、CF = n とする。

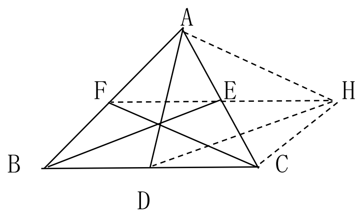
①　　ℓ、m、n の長さの線分を３辺とする三角形の面積は、△ABC の面積の何倍か。

②　　AD = ℓ、BE = m、CF = n を与えて、元の△ABC を作図せよ。



（略解）

①



FE の延長上に EH = FE となる点 H をとる。

四角形EBDH、AFCH は平行四辺形。

∴　　△ADH は、AD = ℓ、DH = m、HA = n

△ABC = 4△AFE = 4△AEH = 4・(△ADH/3)

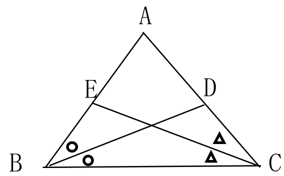
よって、△ADH は△ABC の 3/4 倍

②　　①の作図を逆にたどればよい。

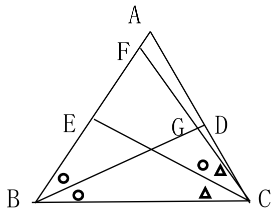
△ADH の重心を E、AC = 2AE となる点を C 、BC = 2DC となる点を B で△ABC。

《頂角の二等分線》

問題　△ABC の∠B、∠C の二等分線と辺AC、AB との交点を D、E とするとき、BD = CE ならば△ABC は AB = AC の二等辺三角形であることを示せ。



（背理法（転換法）による証明）　AB＞AC とすると∠B＜∠C だから



線分 AE 上に点 F をとり、∠FCE = ∠B/2 ＜∠C/2 = ∠ACE とできる。

FC と BD の交点を G とすれば、△FBG ∽△FCE　・・・①

∠B ＜(∠C/2) + (∠B/2) = ∠FCB ∴ FB＞FC　　・・・②

①、②より、BG＞CE ∴ BD＞CE

よって、AB＞AC ならば BD＞CE

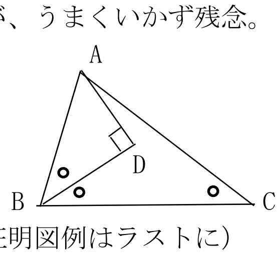
同様に、AB＜AC ならば BD＜CE

以上により、BD = CE　ならば AB = AC（に限る。）

（平面幾何、座標、三角関数の利用など直接証明をいろいろやってみたが、うまくいかず残念。ヒントなど何かありましたら、よろしく。）

＜証明がいろいろある面白い問題（３０通り以上あるとのこと）＞

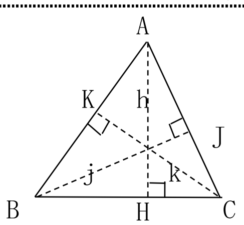
問題　　△ABC において∠B = 2∠C のとき、∠B の二等分線に頂点A から下した垂線の足を D とすれば、AC = 2・BD であることを証明せよ。



（補助線をいろいろ引いて考えてみてください。タップリ楽しめます。証明図例はラストに）

《三角形の３垂線》

問題　　△ABC の３本の垂線の長さ AH = h、BJ = j、CK = k を与えて元の△ABC を作図せよ。



BC = a、CA = b、AB = c とすると、2・△ABC = ah = bj = ck

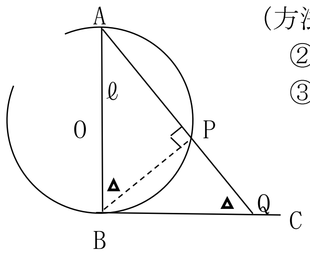
より、h:j:k = 1/a:1/b:1/c 、垂線の長さは対辺の長さに反比例

（方法1）　①　h、j、k を３辺の長さとする三角形を作図する。

②　①の三角形の３本の垂線の長さを３辺の長さとする三角形を作図する。

③　さらに、垂線の長さが、h、j、k になるように相似拡大（縮小）する。

（問題点）①で三角形ができない場合あり。



（方法２）（図参照）　① 適当な長さ（ℓ）の直径AB の円O を描く。

② 端点B において円の接線BC を引く。

③ 点A を通る直線と円O、直線BC との交点を P、Q とする。
AP = x、AQ = y とおくと　$xy = \ell^2$　（x、y は逆数関係）
（∵　△ABP ∽△AQB より AB : AP = AQ : AB ）

④ (ｲ) 円周 O 上または直線 BC 上に、AD = h となる点 D をとり、直線 AD 上に逆数関係にある（円 O または直線 BC 上の）点を D’ とする。

(ﾛ) 同様に、AE = j として E、E’、AF = k として F、F’ をとる。

(ﾊ) あとは（方法１）と同様にすればよい。

＜証明がいろいろある面白い問題の証明図例＞　「AC = 2・BD を証明」