数学散歩　Ⅷ－7　　　　　　　　　２０１７．１２．α　　岐阜市　村山錞司

―　昔のプリントなど　―　　　（その７）

「中学校・高等学校　数学科 教材研究の視点　愛知県教育センター」③

＜何か気になったこと＞

三角錐（四面体）A-BCD の体積は、底面積:S、高さ:h のとき、体積:V = SH/3
何で３で割るのか？　証明は？

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題、考察など＞

《大小比較》

問題１　$a_n = \sqrt[n]{n}$（n=2、3、4、5 ・・・）で与えられる数列 $\{a_n\}$ の各項の大小を比較せよ。

計算により、$\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} > \cdots$ と予想。

（解1）　$n > 3$ のとき $\sqrt[n]{n}$ と $\sqrt[n+1]{n+1}$ を比較する。

$n(n+1)$乗して、　n^{n+1} と $(n+1)^n$　n^n で割って　n と $(1+\frac{1}{n})^n$ を比較する。

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < n$$

（∵１）　$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} < 3$ 、$\frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} < n-3$

（∵２）　$< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < e < 3 < n$

（∵３）　$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 < n$

（その他、いろいろあり）

よって $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$

（解２）　$a_n = n^{1/n}$ だから　$y = x^{1/x}$ の増減を考える。

$\log y = \frac{\log x}{x}$、$\frac{y'}{y} = \frac{1-\log x}{x^2}$

$0<x<e$ で y は増加、$x>e$ で y は減少。$2<e<3$ だから不等式を得る。

問題２　e^π と π^e の大小を比較せよ。

（解）　$e^{1/e}$ と $\pi^{1/\pi}$ を比較する。

$e<\pi$ で、前問の（解２）から　$e^{1/e} > \pi^{1/\pi}$　よって　$e^\pi > \pi^e$

《$\sqrt{2}$ の絡む問題》

問題　任意の自然数に対して、$(\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{m+1} - \sqrt{m}$ となる自然数 m があることを示せ。（慶応大　s63 ）

ポリア「数学の問題の発見的解き方（第２巻）(195ページ)15.53」にもある。

（ポリアの本では）

観察せよ。

$$\sqrt{2}-1 = \sqrt{2}-1$$
$$(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2} = \sqrt{9}-\sqrt{8}$$
$$(\sqrt{2}-1)^3 = 5\sqrt{2}-7 = \sqrt{50}-\sqrt{49}$$
$$(\sqrt{2}-1)^4 = 17-12\sqrt{2} = \sqrt{289}-\sqrt{288}$$

（解答として）・・・　$(\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{m+1} - \sqrt{m}$　ここで m は n に依存する整数である。証明は（平易）な数学的帰納で（アメリカの本）〇〇〇1951.566ページを見よ。（とあるだけ。）

（私のプリントも）解答は略すが、この問題もなかなか内容のある問題である。（証明なし）

（証明（概略）点検をよろしく。）

$(\sqrt{2}-1)^{2n} = a - b\sqrt{2}$　（a、b は正の整数）とすると

$(\sqrt{2}+1)^{2n} = a + b\sqrt{2}$　となって

∴　$1 = a^2 - 2b^2$　　∴　$(\sqrt{2}-1)^{2n} = \sqrt{a^2} - \sqrt{2b^2} = \sqrt{2b^2+1} - \sqrt{2b^2}$

$(\sqrt{2}-1)^{2n+1} = (a-b\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) = (a+b)\sqrt{2}-(a+2b) = \cdots = \sqrt{(a+2b)^2+1} - \sqrt{(a+2b)^2}$

$(\sqrt{2}-1)^{2n+2} = (a-b\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = (3a+4b)-(2a+3b)\sqrt{2} = \cdots = \sqrt{2(2a+3b)^2+1} - \sqrt{2(2a+3b)^2}$

よって、数学的帰納法により成立

《曲線の長さ》

問題　曲線 $y = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ の部分の長さと楕円 $x^2 + \dfrac{y^2}{2} = 1$ の周の長さは等しいことを示せ。

（略証）　楕円は $x = \cos\theta$、$y = \sqrt{2}\sin\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$

$\dfrac{dx}{d\theta} = -\sin\theta$　、$\dfrac{dy}{d\theta} = \sqrt{2}\cos\theta$　だから

楕円の周の長さは

$$2\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2\theta + 2\cos^2\theta}\,d\theta = 2\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2\theta}\,d\theta$$

これは $y = \sin\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ の部分の長さになっている。

（参考）　底面の円の半径が 1 の直円柱を、底面と 45° の角をなす平面で切ったときの切り口の曲線がこの楕円であり、側面を展開すると sin 曲線になる。

《別解のいろいろある問題》　冊子の４つの問題から２題を紹介する。別解を考えてください。

問題１　$x>0$、$y>0$、$x^2 + y^2 = 4$ のとき、$2x + y$ の最大値を求めよ。
問題２　$f(x) = ax^2 - 2x + 2$ とするとき $1<x<4$ において $f(x)>0$ となるような実数 a の範囲を求めよ。

（別解の方針など）

問題１

①　$2x + y = k$ とおき、$y = -2x + k$ を円の式に代入して　$D \geqq 0$

②　直線 $2x + y = k$ が円 $x^2 + y^2 = 4$ に接するときが最大
（ $D = 0$、原点からの距離が円の半径 2 ）

③　$(2x+y)^2 + (x-2y)^2 = 5(x^2 + y^2) = 20$　を利用

④　$x = 2\cos\theta$、$y = 2\sin\theta$　$2x + y = 4\cos\theta + 2\sin\theta = 2\sqrt{5}\cos(\theta - \alpha)$

⑤　ベクトルの内積を利用 $2x + y = (2,1)\cdot(x,y) \leqq \sqrt{5}\sqrt{x^2+y^2} = \boxed{2\sqrt{5}}$

問題２　$ax^2 - 2x + 2 > 0$ の変形によりいろいろ考えられる。

①　そのまま　放物線 $y = ax^2 - 2x + 2$ を考える。（大変）

②　$ax^2 > 2(x-1)$　として　$y = ax^2$ と $y = 2(x-1)$　を比較

③　$ax > \dfrac{2}{x} - 2$　として　$y = ax$ と $y = \dfrac{2}{x} - 2$　を比較　$\boxed{a > \dfrac{1}{2}}$

④　$a > \dfrac{2x-2}{x^2}$　として　$y = \dfrac{2x-2}{x^2}$　の最大値を考える。

（解答例）参考として問題２①の解答例を示す。点検とその他についてもやってみてください。

問題２　①　（キチンと示すのは難しい？？）

$f(1) = a$、$f(4) = 16a - 6$　$1<a<4$ で $f(x)>0$ だから $f(1)$、$f(4) \geqq 0$ より　$a \geqq 3/8$

$a = \dfrac{3}{8}$ のとき　$f(x) = \dfrac{(3x-4)(x-4)}{8}$　$\dfrac{4}{3} < x < 4$ で $f(x)<0$ 。不適

$a>3/8$ とする。

$f(x) = a\left(x - \dfrac{1}{a}\right)^2 - \dfrac{1}{a} + 2$　頂点は、$\left(\dfrac{1}{a},\ -\dfrac{1}{a} + 2\right)$

$a>1$ のとき　$\left(0 < \dfrac{1}{a} < 1\right)$　$f(x) \geqq -\dfrac{1}{a} + 2 > 0$　適

$a = 1$ のとき　$f(x) = (x-1)^2 + 1 > 0$　適

$\dfrac{3}{8} < a < 1$　のとき　$1 < \dfrac{1}{a} < \dfrac{8}{3} < 4$

$f(x) \geqq -\dfrac{1}{a} + 2 > 0$　$\therefore\ a > \dfrac{1}{2}$　$\left(= \dfrac{4}{8}\right)$ が必要

以上より、求める範囲は、　$a > \dfrac{1}{2}$

＜何か気になったこと＞３角柱を３等分割(体積）する。（図を描いてみてください。）