

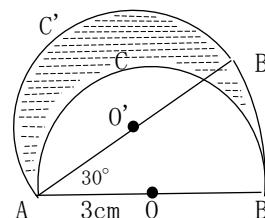
《興味を引く問題》

冊子の終りのところに「興味を引く問題」として30の問題を掲載しています。過去の「数学散歩」で扱ったものもあります。昔に戻ってやってみましたが、問題文やヒント、略解にいろいろなミスを発見し、反省しきりです。また、難問、珍問（中には愚問も）ありで、解くのに四苦八苦、数日、楽しんだ(?)問題もありました。最初に問題を紹介します。

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

----- < 問 題 > -----

1	(あみだくじの問題(略) 参考「数学散歩 VIII-2」)
2	新幹線の座席は2人がけ、3人がけになっているが、その利点を述べよ。
3	12gの分銅と20gの分銅を幾つか使っててんびんで量ることにする。6gの重さを量ることができるか。(広島大附属高)
4	$4 + 5 + 6 + 7 + 18 + 29 + 30 = 99$ のように、0 から 9 までの数字を1度ずつ使って、全体の和が 100 になるようにせよ。
5	(打率の問題(略) 参考「数学散歩 VII-7」)
6	頁数が多くて厚い本を、背を無理やり平にして机の上に置くとき、その縁はどうなるか。
7	半径5の円に内接する△ABC がある。AB = 8、AC = 3 のとき、点A から辺BC に下した垂線AH の長さを求めよ。(単位省略) ・・・・これは中学校の教科書の問題から採ったものである。教科書には図形があり補助線も点線で入れてあった。なお、高校の新任研修でこの問題を扱ったところ、相似関係を利用した者は71名中8名(そのうち正解者は2名)のみで、他は正弦定理など初等幾何以外の方法によっていた。補助線に気がつくことの難しさを感じさせた問題である。
8	半径3 (cm) の半円O を図のように点A を中心に30°回転したときにできる(曲線AC'B' と半円ACB で囲まれた)部分の面積を求めよ。
9	△ABC が与えられている。1辺が辺BC 上にあって△ABC に内接する正方形を作図せよ。
10	与えられた長さ a、b、c、d を4つの辺とする台形を作図せよ。ただし、a、c の2辺が平行とする。(注 四辺形において1組の対辺だけが平行であるとき台形という。)
11	等脚台形ABCD (AB = DC、AD // BC、AD < BC) がある。対角線AC、BD の交点E を通る線分FG の長さは、辺BC と平行になるとき最小の長さになることを示せ。
12	△ABC の各辺の外側に正三角形をおく。3つの正三角形の重心を結ぶと正三角形になることを示せ。
13	いかなる凸多面体においても、辺の数が6より小さい面が存在することを示せ。
14	$M = \{ x \mid f(x)=x \}$ 、 $N = \{ x \mid f(f(x))=x \}$ とおく。f(x) が増加関数ならば $M = N$ であることを示せ。
15	$abc \neq 0$ 、 $a^2 = bc$ 、 $b^2 = ca$ のとき $p = \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ の値を求めよ。
16	$(\sqrt{5} + 2)^{1/3} - (\sqrt{5} - 2)^{1/3}$ を計算せよ。
17	x、y、z が実数で、 $x+y+z=3$ 、 $x^2+y^2+z^2=27$ のとき $x^3+y^3+z^3$ のとりうる値の範囲を求めよ。
18	$1 \leq a \leq b \leq c \leq 2$ のとき不等式 $9 \leq (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq 10$ を証明せよ。
19	次の(1)、(2)はともに点 (x_0, y_0) から円 $x^2+y^2 = r^2$ に引いた2本の接線の方程式を与えることを示せ。 (1) $(xy_0 - x_0y)^2 = r^2 \{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \}$ (2) $(x_0x + y_0y - r^2)^2 = (x_0^2 + y_0^2 - r^2) (x^2 + y^2 - r^2)$ また、その図形的意味(ベクトルを利用してもよい)を考えよ。
20	円 $x^2+y^2=1$ を直線ℓに関して対称移動したら x軸に接した。このような直線ℓの存在範囲を求めよ。

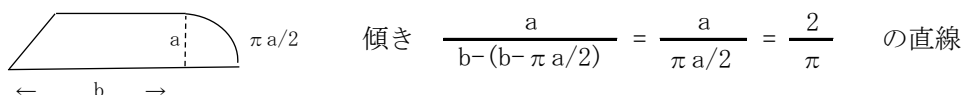


2 1	3 次方程式 $z^3+2z^2+3z+4=0$ の解を $z=x+yi$ (x, y は実数、 i は虚数単位) として点 (x, y) を考える。このような点 (x, y) は円 $x^2+y^2=1$ の外側に幾つあるか。(東京理科大)
2 2	2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c は実数) がある。 $ x \leq 1$ で $ f(x) \leq 1$ を満たすとき $ f'(x) \leq 4$ を示せ。(東京工業大)
2 3	x についての方程式 $\sin x + \sqrt{a} \cos x = a$ (a は定数) が実数解をもつとき、実数 a の範囲を求めよ。
2 4	半径 a の円柱が 3 本あって、それらの軸が互いに垂直に交わっているとき、共通な部分の体積を求めよ。
2 5	「 $a_1 = 1$ 、 $a_{n+1} = \frac{2a_n+5}{a_n+2}$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。」について、何故このよ うな漸化式が出てくるのか。
2 6	$f(x)$ は微分可能とする。任意の実数 a, b について、 $\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \{ f(a)+f(b) \}$ が成り立つとき、 $f(x)$ は 1 次関数であることを示せ。
2 7	$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{8} \log 2$ を示せ。
2 8	A、B、C の 3 チームが試合をする。まず、A、B の 2 チームが対戦する。次に、その勝者と C が対戦する。以後、前の試合の勝者と残りのチームが対戦する。これを続けて、2 連勝したチームを優勝とする。このとき A、B、C の優勝する確率を求めよ。 (「数学散歩 IV-10 (2016.5)」で扱っている。(再掲))
2 9	n 人でじゃんけんをして勝ち負けを決める。ちょうど k 回目で初めて勝負がつく (勝ち、負けの 2 つのグループに分かれる) 確率を求めよ。 (参考 「数学散歩 IV-11 (2016.5)」)
3 0	統計の問題 (ゴールトンの回帰の効果) (略)

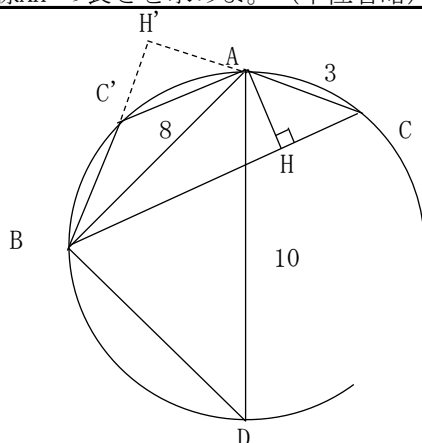
----- < 問題と考察 > -----

2	新幹線の座席は 2 人がけ、3 人がけになっているが、その利点を述べよ。 2 以上の整数は $2m + 3n$ で表すことができ、団体客の中で一人ぼっちの座席になる客はいない。
3	12 g の分銅と 20 g の分銅を幾つか使っててんびんで量ることにする。6 g の重さを量ることができるか。(広島大附属高) $12m + 20n = 4(3m + 5n)$ だから 4g の倍数の重さのものしか量ることはできない。
4	$4 + 5 + 6 + 7 + 18 + 29 + 30 = 99$ のように、0 から 9 までの数字を 1 度ずつ使って、全体の和が 100 になるようにせよ。 1 の位の数の和を m とすると、10 の位の数の和は、 $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9-m = 45 - m$ で、全体の和は $m + 10 \cdot (45 - m) = 9(50 - m)$ 、100 は 9 の倍数でないから不可
6	頁数が多くて厚い本を、背を無理やり平にして机の上に置くと、その縁はどうなるか。

$\leftarrow b - \pi a/2 \rightarrow$



7	半径 5 の円に内接する $\triangle ABC$ がある。AB = 8、AC = 3 のとき、点 A から辺 BC に下した垂線 AH の長さを求めよ。(単位省略)
---	--



AD = 10 を円の直径とする。
点 C は弦 AB について優弧上の場合 C と、劣弧上の場合 C' がある。
 $\triangle ADB \sim \triangle ACH(C'H')$
 $AD : AB = AC : AH (AC' : AH')$
より、
 $10 : 8 = 3 : AH(AH')$
 $AH(AH') = \frac{12}{5}$

他の問題の考察は次回に・・・