数学散歩　Ⅷ－９　　　　　　　　　２０１８．１.α　　岐阜市　村山錞司

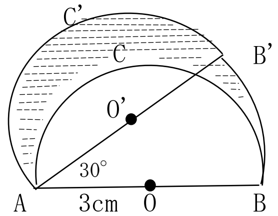
―　昔のプリントなど　―　　　（その９）

「中学校・高等学校　数学科 教材研究の視点　愛知県教育センター ⑤

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

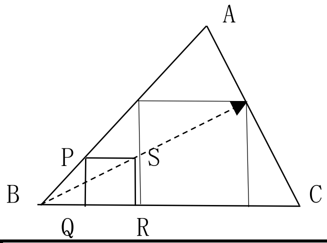
＜問題と考察＞

８　　半径３(cm) の半円O を図のように点A を中心に３０°回転したときににできる　(曲線AC'B'B と半円ACB で囲まれた) 部分の面積を求めよ。



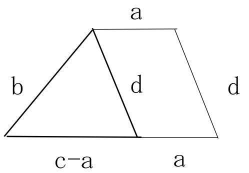
半円AC'B' ＋ 扇型BB'A － 半円ACB ＝ 扇型BB'A ＝ ３π (cm^2)

９　　△ABC が与えられている。１辺が辺BC 上にあって△ABC に内接する正方形を作図せよ。



辺AB 上に点P が、辺QR が辺BC 上にあるように正方形PQRS を作図し、BS を延長して辺AC との交点が１つの頂点になるように相似拡大すればよい。

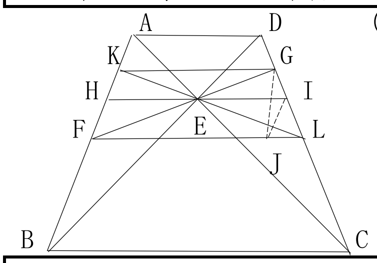
１０　与えられた長さ a、b、c、d を４つの辺とする台形を作図せよ。ただし、a、c の２辺が平行とする。(注　四辺形において１組の対辺だけが平行であるとき台形という。)



①　　a＜c として、b、c−a、d を３辺の長さとする三角形を作図する。

②　　①の三角形の辺の長さが d の辺の外側に、向かい合う２辺の長さが a、d の平行四辺形をつなげばよい。

１１　等脚台形ABCD (AB ＝ DC、AD∥BC、AD＜BC) がある。対角線AC、BD の交点E を通る線分FG の長さは、辺BC と平行になるとき最小の長さになることを示せ。



(証明 図参照)

K、H、F は辺AB 上、G、I、L は辺DC 上、FG、HI、KL は点E を通り、AD∥KG∥HI∥FL∥BC とする。

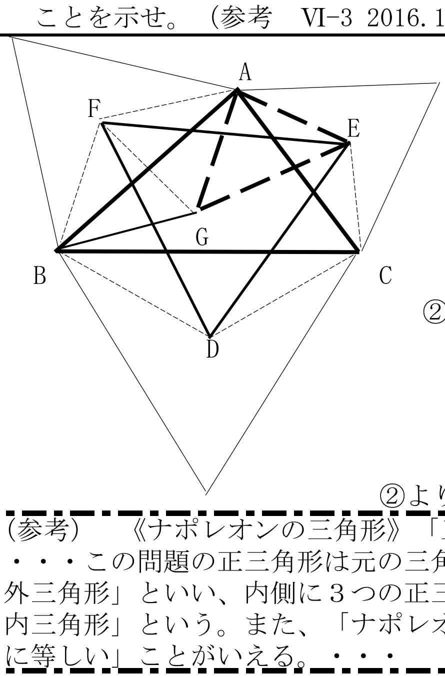
また、FL 上に IL=IJ となる点J をとる。四角形HFJI は平行四辺形

GI＜HF=IL=IJ より ∠GJI＜∠JGI また ∠IJL=∠ILJ

∠GJF=∠JGI+∠ILJ＞(1/2)・(∠JGI+∠GJI+∠ILJ+∠IJL)=90°

よって、∠GJF が鈍角だから、△GFJ で FG ＞ FJ ＝ HI

１２　△ABC の各辺の外側に正三角形をおく。３つの正三角形の重心を結ぶと正三角形になることを示せ。(参考　Ⅵ-3 2016.1.β)



(証明)　△ABC の辺BC、CA、AB の３つの正三角形の重心をそれぞれ D、E、F とし、点F の辺AB に対する対称点を G とする。

①　　△ABC ∽ △AGE　((ｲ)、(ﾛ)より)

(ｲ)　　∠BAC ＝ ∠BAG (30°)+∠GAC
　　　　＝ ∠CAE(30°) +∠GAC ＝ ∠GAE

(ﾛ)　　AB/AG=AC/AE ∴ AB/AC=AG/AE

②　　△FBD≡△FGE ((ｲ)、(ﾛ)、(ﾊ)より)

(ｲ)　　①より、∠ABC=∠AGE　　+60° して ∠FBD=∠FGE

(ﾛ)　　△FBG は正三角形だから、　FB=FG

(ﾊ)　　AB/BC=AG/GE(①より)=FG/GE(∵AG=FG)

また、 AB/FG=BC/BD=$\sqrt{3}$ ∴ AB/BC=FG/BD　∴ BD=GE

②より、FD=FE、同様に ED=EF だから、△DEF は正三角形

(参考)　《ナポレオンの三角形》「三角形の七不思議　細矢治夫 (BLUE BACKS)」より

・・・この問題の正三角形は元の三角形の外側の３つの正三角形の重心によるから「ナポレオンの外三角形」といい、内側に３つの正三角形をかいてその重心を結んでも同様にでき「ナポレオンの内三角形」という。また、「ナポレオンの外と内の２つの三角形の面積の差は、元の三角形の面積に等しい」ことがいえる。・・・

（インターネットで「ナポレオンの定理」を調べたらいろいろ出てきました。その中に三角関数を利用したスッキリした証明がありましたので、その概略を紹介します。）

＜証明の概要＞　∠BAC = A、BC=a、CA=b、AB=c、△ABC の面積= S とおく。

△AEF において、　$AE = \dfrac{b}{\sqrt{3}}$、　$AF = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$　、S=(1/2)bc・sinA、∠EAC=∠FAB=30°

$$\therefore\ EF^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - 2\cdot\frac{bc}{3}\cdot\cos(A+60^\circ) = \frac{a^2+b^2+c^2}{6} + \frac{2S}{\sqrt{3}}$$

FD^2、DE^2 についても同様だから、　EF=FD=DE で、△DEF は正三角形

△DEF の面積は、$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot EF^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{24}(a^2+b^2+c^2) + \dfrac{1}{2}S$　（外三角形の面積）

内三角形については、

$$E'F'^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - 2\cdot\frac{bc}{3}\cdot\cos(A-60^\circ) = \frac{a^2+b^2+c^2}{6} - \frac{2S}{\sqrt{3}}$$

E'F'=F'D'=D'E'　で、△D'E'F'　は正三角形

面積は　$\dfrac{\sqrt{3}}{24}(a^2+b^2+c^2) - \dfrac{1}{2}S$　、外と内の面積の差は S になる。

１３　いかなる凸多面体においても、辺の数が６より小さい面が存在することを示せ。

（証明）　n≧６のとき、凸n多角形の内角１つの平均は、

$$\frac{(n-2)\pi}{n} = \left(1 - \frac{2}{n}\right)\pi \geqq \frac{2}{3}\pi$$

凸多面体の１つの頂点に集まる面の数は３個以上で、(2/3)π×3=2π(360°) 以上となる頂点があって、凸にならない。

１４　M = { x | f(x)=x }、N = { x | f(f(x))=x } とおく。f(x) が増加関数ならば M = N であることを示せ。

（注：a<b なら f(a)≦f(b) が常に成立するとき、f(x) は増加関数という。）

（証明）　①　$M \ni {}^\forall a$　とすると、f(a)=a だから f(f(a))=f(a)=a　∴ M ⊆ N

②　$N \ni {}^\forall a$　とすると、f(f(a))=a だから f(a)=b とすると f(b)=a

f(x) は増加関数だから、a≠b とすると、

a<b ならば f(a)≦f(b) で b≦a<b、同様に a>b ならば b≧a>b　となって矛盾

よって b = a で f(a) = a だから、a ∈ M ∴ N ⊆ M

①、②より　M = N

１５　abc ≠ 0、a^2 = bc、b^2 = ca のとき　$p = \dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b}$　の値を求めよ。

（解）　$c = \dfrac{a^2}{b} = \dfrac{b^2}{a}$　　∴　$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) = 0$

a = b のとき、p = 2、　$a^2 + ab + b^2 = 0$　のとき、$a^2 + b^2 = -ab$ より　p = −1

１６　$(\sqrt{5}+2)^{1/3} - (\sqrt{5}-2)^{1/3}$　を計算せよ。

（解）　$x = (\sqrt{5}+2)^{1/3}$　、　$y = (\sqrt{5}-2)^{1/3}$　とすると　$x^3 = \sqrt{5}+2$　、　$y^3 = \sqrt{5}-2$

t = x − y、　$xy = (5-4)^{1/3} = 1$　　$t^3 = (x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$ だから

$t^3 + 3t - 4 = 0$、$(t-1)(t^2+t+4) = 0$　　t は実数だから t = 1

（参考　３次方程式の解法を逆用した問題である）

１７　x、y、z が実数で、x+y+z=3、$x^2+y^2+z^2=27$ のとき　$x^3+y^3+z^3$ のとりうる値の範囲を求めよ。

（解）　x+y = 3−z、$xy = \{(x+y)^2-(x^2+y^2)\}/2 = z^2-3z-9$

x、y を２根とする２次方程式は　$t^2 - (3-z)t + z^2-3z-9 = 0$

x、y は実数だから D = −3(z+3)(z−5)≧0　∴ −3 ≦ z ≦ 5

$P = x^3+y^3+z^3$ とおくと　$P = 3(z^3 - 3z^2 - 9z + 36)$　　$P' = 9(z-3)(z+1)$

z	−3	…	−1	…	3	…	5
P'		+	0	−	0	+	
P	27	↗	123	↘	27	↗	123

よって　27 ≦ P ≦ 123

（x、y、z の値の確認もよろしく。）