数学散歩　Ⅸ－１　　　　　　　　　　２０１８．２．α　　岐阜市　村山錞司

問題づくりの参考に　　：PART　１

昔、現役のころ、考査、模試（自校、外部）、入試（高、大）、採試・・・の問題づくりをいろいろやり、苦楽もいろいろありました。参考にした算数、数学関係書（自宅の本棚や市立図書館）などを中心に面白い発想（？）の話題、問題を幾つか、順次紹介します。楽しめると思います。
（問題文の表現や数値など原問題に変更を加えたものもあります。）

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題など＞

「田中メソッド　算数トレーニング　田中保成　丸善」

≪算数の問題です。≫

１．　計算せよ。

(1)　［{27-18÷(9-3×2)}×15÷(5-2)］÷7-4 =

(2)　[28-{14+75÷25-(7×2-4)}÷7}]÷9 =

（頭のウォーミングアップです。いずれも 3 分以内で）

２．　ある数 X の整数部分を A、小数部分を B とすると、3×A + 4×B = 15 になる。B は 0 ではない。ある数 X を求めよ。

（不等式を使わないで）

３．　3/4 より大きく 8/9 より小さい分数で、分母が 6 の分数は何か。

（懐かしい分数の問題？）

４．　5/9 で割っても、4/15 で割っても、答が整数になる分数のうち、最も小さい分数は何か。

（÷の反対は×です。）

５　箱に、同じ大きさの本を６冊ずつ入れると１０冊余り、８冊ずつ入れると箱がちょうど３つ余る。箱は幾つあるか。

（過不足算というそうです。）

６．　６％の食塩水２００ｇと８％の食塩水１００ｇをまぜて、さらに水を何ｇか加えて、４％の食塩水を作ることにした。水を何ｇ加えればよいか。

（昔、中学校でやったように思いますが。）

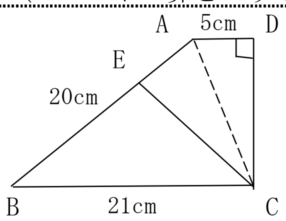
７．　長さ１８ｃｍのテープが６枚あり、のりしろを２ｃｍにしてつないだ。つないだテープ全体の長さは何ｃｍになるか。

（つなぎ目が気になります。）

８．　一定の割合で水の湧き出る井戸がある。毎分１０ℓずつくみ上げられるポンプ使って井戸の水をくむと３０分でなくなり、毎分１７ℓずつくみ上げられるポンプを使えば１５分でなくなる。毎分２４ℓずつくみ上げられるポンプを使えば、何分で井戸の水はなくなるか。

（ニュートン算というそうです。）

９．



図のように、AD∥BC、AD⊥DC である四角形ABCD があり、AD = 5cm、AB = 20cm、BC = 21cm である。

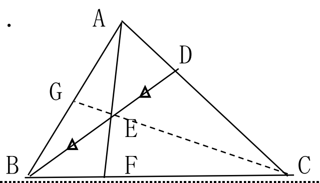
辺AB 上に点E をとると、四角形AECD の面積と三角形EBC の面積が等しくなった。

⑴　AE の長さを求めよ。

⑵　△AEC の面積が$48\mathrm{cm}^2$のときCD の長さを求めよ。

（算数だから、三平方の定理は使えません。）

１０．



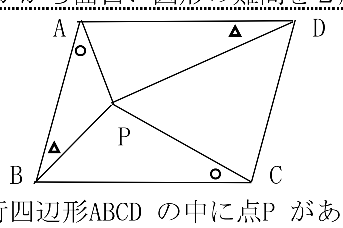
△ABC で D は辺AC 上の点で AD : DC = 1:3、点E が線分BD の中点のとき、△ABC の面積は△ABE の面積の何倍か。

（「算数」の問題です。
チェバやメネラウスは不可）

「数学の教育　１９８９年５月　栗田稔」（飛び入り）

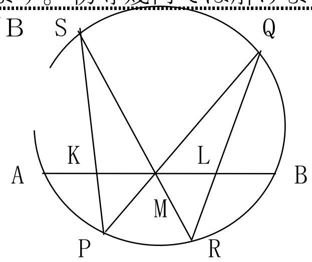
（「数学散歩　Ⅷ-3、4」でもご紹介しましたが、先生には大変お世話になりました。
上記の本は先生からいただいた本の１冊で、数学教育についてまとめられたものです。
本のなかから面白い図形の難問を２題、紹介します。初等幾何では解けませんでした。）

問題Ａ



平行四辺形ABCD の中に点P があって、∠PAB = ∠PCB ならば、∠PBA = ∠PDA を示せ。

問題Ｂ



円の弦AB の中点M を通る２つの弦PQ、RS について、PS、QR がAB と交わる点を K、L とすると、M は線分KL の PS、QR がAB と交わる点を K、L とすると、M は線分KL の中点であることを示せ。

（先生の１文から）
なかなか手強い問題です。
（本の証明には、あっと驚かされます。）

（先生の１文から）
これは面白い性質ですが、証明は少し面倒です。）
（初等幾何での証明を考えたが、アイデアが浮かばない。
いい方法があればヒントなどよろしく。）

＜答など＞

１．⑴　11、⑵　3

２．小数部分は 1 より小、4×B は4より小で 1、2、3　　3×A は 14、13、12 になり
A = 4、B = 3/4 = 0.75　　ある数は X = 0.75

３．3/4=27/36、28/36、29/36、30/36=5/6、31/36、32/36　　答　5/6

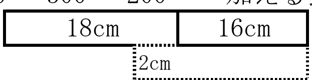
４．分数を q/p とする。5/9 、4/15 で割ると整数になるから、
分子 q は 5 と 4 で割れ、最小公倍数の 20、
分母 p は 9 と 15 をかけると整数になり、最大公約数が 3 だから、答は　20/3

５．余るのは、10 冊と、8-6 = 2 （冊）ずつ追加後の空箱 3 箱分だから、
10 + 3×6 = 28　　28÷2 = 14　（2 冊ずつ追加した箱の数）
空箱と合わせて　　14 + 3 = 17　　答は　17 箱

６．食塩の量は、　$\frac{6}{100} \times 200 + \frac{8}{100} \times 100 = 20$ (g)

4 % の食塩水の量は、　$\frac{4}{100} \times \boxed{} = 20$ (g) より、 $\boxed{} = 500$ (g)

500 － 300 = 200　　加える食塩水の量は、200 g

７．

・・・　（図を描けば・・・）
18 + 16×5 = 98　　答は　98 (cm)

８．（面倒なので、文字を使います。）
井戸の最初の水の量 A (ℓ) 、湧き出る量 毎分 a(ℓ) 、毎分２４ℓのポンプでは x 分かかるとすると、　A+30a = 10×30、A+15a = 17×15、A+xa = 24x
a = 3、A = 210 より、x = 10 (分)

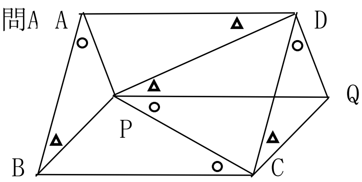
９．（以下、単位省略）
⑴　DC = 2h として、△ADC = 5h、△ABC = 21h、△EBC = (5h+21h)/2 = 13h
∴　△AEC = 21h － 13h = 8h　　AE/AB = △AEC/△ABC = 8/21

$$AE = 20 \cdot \frac{8}{21} = \frac{160}{21} = 7\frac{13}{21} \ (\mathrm{cm}^2)$$

⑵　△AAEC = 48、h = 6、DC = 2h = 12 (cm)

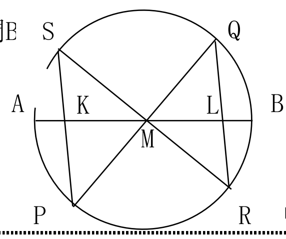
１０．△ABD = 2△ABE、△ABC = 4△ABD = 8△ABE　　８倍
（参考）△EDC を直線AGB で切って、　EG/GC・CA/AD・DB/BE=1、EG/GC=8
AB を底辺と考えれば、△ABC = ８△ABE

「数学の教育　１９８９年５月　栗田稔」

問A 

（本の証明から　概略）
△PAB を平行移動した△QDC を作ると、点 P、C、Q、D は同一円周上。

（他の証明がありましたら、ヒントなどよろしく。）

問E 

（本の記述から）
ある変換を施すと図のようになって、明らかです。これは少し高級です。（M が円の中心になる変換とは？）

（平面座標を利用した証明の方針、概略） M を原点 (0,0)、
円を $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ $(0<a<r)$ とする。 PQ ： $y = mx$ $(m>0)$、RS ： $y = nx$ $(n<0)$
$P(x_1, mx_1)$、 $Q(x_2, mx_2)$、 $R(x_3, nx_3)$、 $S(x_4, nx_4)$ 　$(x_1<0、x_2>0、x_3>0、x_4<0)$
とおき、直線PS、QR と x 軸(線分(AB)との交点 K、L の x 座標を求めれば、

$$k = \frac{(m-n)x_1x_4}{mx_1 - nx_4} < 0 \ 、\ \ell = \frac{(m-n)x_2x_3}{mx_2 - nx_3} > 0$$

k + ℓ を計算すれば 0 になり、M は線分KL の中点になる。