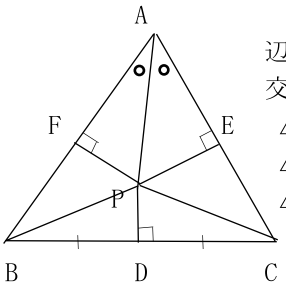
数学散歩　寄り道－４　　　　　　　　　２０１７．９．　？　　岐阜市　村山錞司

【３つの話題】　証明などは概略のみのもあります。疑問点などありましたらご一報ください。

① 《短大（幼児教育）の授業ﾌﾟﾘﾝﾄ》　面白いものが残っていましたので、追加で紹介します。

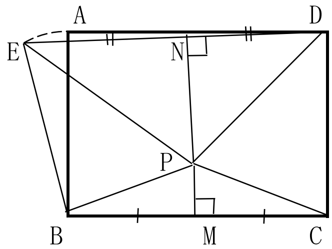
＜不思議な証明２題＞

①　どんな三角形も二等辺三角形になる。



∠BAC の二等分線と辺BC の垂直二等分線の交点を P とすれば、
△APF ≡ △APE、
△BDP ≡ △CDP より、
△PBF ≡ △PCE、
∴ AB = AF+BF
=AE+CE = AC

②　鈍角は直角に等しい。

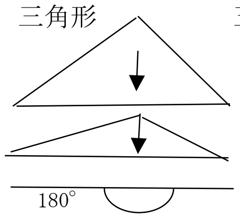


点B を中心にして辺BA を回転しBE に
BC、ED の垂直二等分線の交点を P
△BPM ≡ △CPM、
△ENP ≡ △DNP より
△BEP ≡ △CDP、
∴　∠MBE = ∠MBP+∠PBE = ∠MCP+∠PCD
= ∠MCD = 90°

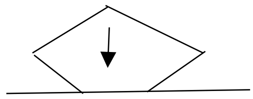
＜発想法　３題＞

①　多角形の内角の和－極端化、押しつぶし

三角形



五角形（ﾊﾟﾝﾀｸﾞﾗﾌ）

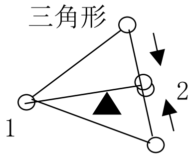


同様にして

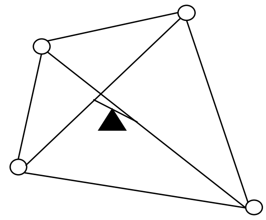
180°×3 = 540°

②　重心の求め方（発展）

三角形

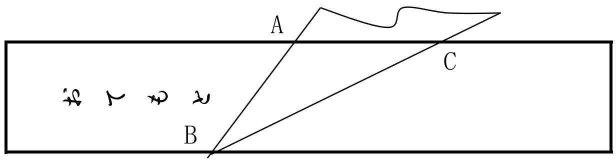


四角形（平面）⇒四面体（立体）



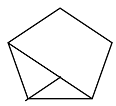
③　割り箸の袋を使って

(ｲ)　袋を２つに折り重なってできる三角形ABC の面積が最大、最小になるのはどんなときか。



（高さ（幅）は一定、底辺AC の長さは？）

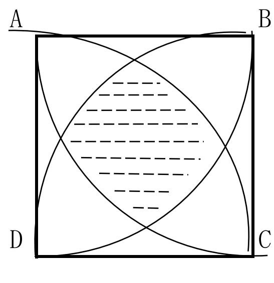
(ﾛ)　適当に折って正五角形をつくれ。



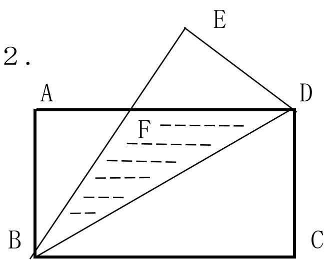
（楽しめます。お○のつまみに？
中に挟み込んで箸置きには）

＜図形雑題　４題＞

１．　１辺が６ｃｍの正方形ABCD がある。４つの頂点A、B、C、D を中心とした円を描いたとき、囲まれた部分の周囲の長さを求めよ。　（{(2π・6)/(3・4)}・4 = 4π）　　　(4πcm)

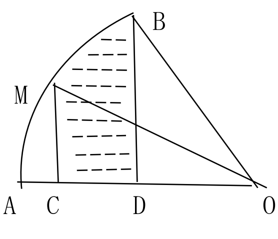


２．

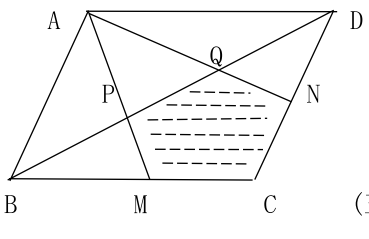


横AD 長さが 64cm、縦AB の長さが 48cm の長方形がある。この長方形を対角線BD で折り曲げたとき、重なる部分△BDF の面積を求めよ。
(F からBD への垂線の足をH とすると △FHD ∽△DCB（辺の比は 3:4:5）を利用)　　(1200cm^2)

３．　半径 6cm、中心角 60°の扇形OAB がある。弧AAB の中点を M とし、M、B から半径OA に垂線MC、BD を引く。このとき囲まれた図形BMCD の面積を求めよ。
（図形BMCD = 扇形OBM+△OMC−△OBD = 扇形OBM）　　(3πcm^2)



４．

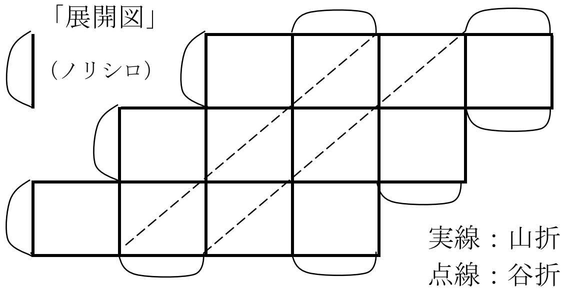


平行四辺形ABCD の辺BC、CD の中点をそれぞれM、N とし、線分AM、AN と対角線BD との交点をそれぞれP、Q とするとき、五角形PMCNQ の面積は平行四辺形ABCD の何倍か。
(五角形 = △DBC−2・△PBM = △DBC・{1−2・(1/3)・(1/2)}
= 平行四辺形ABCD/3)　　　　(1/3 倍)

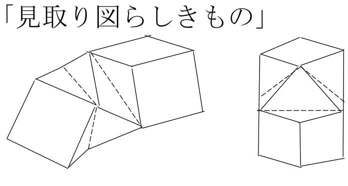
② 《妙な３つの立方体》

　　どこかの本で見かけた３つの立方体が斜めに重なった展開図です。厚紙（画用紙など）で作ってみてください。１辺が４ｃｍのものを作りましたが、組み立てに一苦労しました。

「展開図」



「見取り図らしきもの」



実線：山折り　　（感想）　タップリ楽しめました。四面体の隣にありますが、妙な感じです。

点線：谷折り

③ 《フィボナッチ数列など楽しんだ問題をいくつか》

「BLEU BACKS 世界は２乗でできている　自然にひそむ平方数の不思議　小島寛之」

（全 243頁 市立図書館）　＜目次から＞

　興味をそそられるテーマがいろいろ、理系の生徒たちにも一読をと思う本です。この報告では、章末にあった楽しい問題をいくつか紹介します。ﾋﾝﾄになる問題①を省略したのもあります。

１．①　１０段からなる階段がある。階段を昇るとき、１段ずつ昇るか、１段とばして２段昇るのも許されるとして、１０段ある階段を上まで昇る昇り方は何通りあるか。 ②　①において、５段目の階段を踏む場合と、踏まない場合に分けて計算してみよ。

（解）①　ｎ段ある階段を、０段目から始めて１段または２段昇るとして、最上段のｎ段目まで昇る昇り方が F_n 通り（$n \geqq 1$）あるとし、また、a段目からb段目まで昇るのを(a,b)で表す。

$F_1 = 1$（(0,1)）、$F_2 = 2$（(0,1)+(1,2)、(0,2)）、

$F_3 = 3$（(0,1)+(1,2)+(2,3)、(0,1)+(1,3)、(0,2)+(2,3)）、・・・

最上段の 10 段目に昇る最後について、9 段目からの(9,10) と、8 段目から 2 段とびの(8,10) がある。従って　$F_{10} = F_9 + F_8$、　一般化して、$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geqq 3)$

$F_4 = F_2+F_3 = 2+3=5$ 、$F_5 = F_3+F_4 = 3+5=8$ 、$F_6 = 13$、$F_7 = 21$、$F_8 = 34$、$F_8 = 55$、$F_{10} = 89$、

②（ｲ）５段目を踏む場合：　０段目から５段目まで昇り(F_5 通り）、５段目から改めて１０段目まで５段昇る（F_5 通り）。　$F_5 \times F_5 = F_5^2 = 64$

（ﾛ）５段目を踏まない場合：　０段目から４段目まで昇り(F_4 通り）、５段目をとばして、６段目から１０段目まで４段昇る（F_4 通り）。　$F_4 \times F_4 = F_4^2 = 25$

（ｲ）、（ﾛ）から、　$F_5^2 + F_4^2 = 89 = F_{10}$

一般化して、　$F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n}$　（$n \geqq 2$）

ﾌｨﾎﾞﾅｯﾁ数列：$a_1 = 1$、$a_2 = 1$、$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$　（$n \geqq 3$）で与えられる数列 1、1、2、3、5、8、13、21、34、55、89、・・・　（注：$n \geqq 2$ 、$a_0 = 0$ としてもよい。）

$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$ より特性方程式は　$t^2 - t - 1 = 0$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ から } a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \quad (n \geqq 0)$$

＜ F_n と a_n との関係 ＞　　F_n は $a_2 = 1$ から始まっている。

$$F_n = a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}$$

演習　$F_{2n} = F_n^2 + F_{n-1}^2$（$n \geqq 2$）　の証明の計算を楽しんでください。（解略）

＜以下、問題と解を分けて紹介します。まずは問題です。＞

２．　1、1、2、2、3、3、4、4 の８個の数字を適当に並べて作った８桁の数は、絶対に平方数にはならないことを示せ。
３．　①　$3^a + 3^b$（a、b は自然数）の形で書ける平方数を１つ見つけよ。 ②　$3^a + 3^b$（a、b は自然数）の形で書ける平方数は無限にあることを示せ。
３'．　$2^a + 2^b$（a、b は異なる自然数）の形で書ける平方数は無限にあることを示せ。

4．　４で割ると３余る数は、２つの平方数の和になることはないことを示せ。

5．　連続した平方数に±をつけたものの和、$\pm 1 \pm 4 \pm 9 \pm \cdots \pm k^2$、でどんな数が作れるか。

（例）$1 = 1$、$2 = -1 -4 -9 +16$

①　3 と 4 はどうか。　②　$k^2 - (k+1)^2 - (k+2)^2 + (k+3)^2$ を計算せよ。

③　すべての自然数ｎは±とｋをうまく選べば、$\pm 1 \pm 4 \pm 9 \pm \cdots \pm k^2$、と表すことができることを示せ。

6．　$5^a + 5^b$（a、b は自然数）の形で書ける平方数は存在しないことを示せ。

7．　n が自然数で 2n+1 が平方数のときは、n+1 は２個の平方数の和になることを示せ。

（解答）

2．　1+1+2+2+3+3+4+4=20=3×6+2 より、作った 8 桁の数を 3 で割ると余りは 2

すべての整数は、3k、3k+1、3k+2 のいずれかになり、その平方は、

$(3k)^2=9k^2=3\times k^2$、　$(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3\times(3k^2+2k)+1$、　$(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3\times(3k^2+4k+1)+1$、

3 で割ると余りは 0 か 1 となって、余りが 2 となることはない。

3．　①　$3^2 + 3^3 = 9+27 = 36 = 6^2$

②　$9^k = (3^k)^2$ を①にかけて、　$(3^2 + 3^3)\times 9^k = \underline{3^{2k+2} + 3^{2k+3}} = \underline{(6\times 3^k)^2}$

3’．　$(2^2 + 2^5)\times 2^{2k} = \underline{2^{2k+2} + 2^{2k+5}} = \underline{(6\times 2^k)^2}$

4．　すべての整数は、2k、、2k+1 でその平方は、$4k^2$、$4k^2+4k+1$ となり、４で割った余りは 0 か 1 になり、２つの平方数の和の余りは 0 か 1 か 2 で 3 になることはない。

5．①　$3 = -1+4 = -1+(4-9-16+25)$（②で k=2）

$4 = -1 -4 +9$（②で k=0）$= 1-4-9+16$（②で k=1）

②と 0=4−4 の利用により、表現方法は無数にある。

（例））$2 = \underbrace{\mathbf{-1\ -4\ -9\ +16}}_{2} + \underbrace{25-36-49+64}_{4} - \underbrace{(81-100-121+144)}_{4} = \cdots$

②　$k^2-(k^2+2k+1)-(k^2+4k+4)+(k^2+6k+9) = 4$

③　１、2、3、4 はすみ。

k=2 として $\underline{\mathbf{5}} = 1+\underline{4} = 1+\underline{4-9-16+25}$

k=5 として $\underline{\mathbf{6}} = 2+\underline{4} = -1-4-9+16+\underline{25-36-49+64}$

k=3 として $\underline{\mathbf{7}} = 3+\underline{4} = -1+4+\underline{9-16-25+36}$

k=4 として $\underline{\mathbf{8}} = 4+\underline{4} = -1-4+9+\underline{16-25-36+49}$　・・・

以下、同様にして m が表されれば②により m+4 が表され、すべての自然数について表される。

（参考）k=9 として $10 = \underline{\mathbf{6}}+\underline{4} = -1-4-9+16+25-36-49+64+\underline{81-100-121+144}$

6．　5^a について、5、25、125、625、・・・より末尾２桁は 05 か 25 でその２つの和は 10、30、50 になり、単独の平方数の末尾の 05、25 にはならない。

7．　2n+1 は奇数だから奇数の平方数になるから、　$2n+1 = (2k+1)^2$（k は自然数）とできる。

$2n+1 = 4k^2+4k+1$ より　$n = 2k^2+2k$　$\therefore\ n+1 = k^2 + (k+1)^2$