

メディアコスモス、ハートフルスクエアG（岐阜市立図書館と分館）で手にした本です。

「BLUE BACKS やじうま入試数学 問題に秘められた味のツボ 金重明 講談社」

表紙のいろいろな記載事項（上記）とマンガの絵に魅かれて手にしました。入試問題を 29 問、大半は中学校、大学で、高校については 1 問のみ（第 2 問「カメが前足を引っ込めると」鶴亀算の内容、山口県立高校）、問題と解説、周辺の話題などが内容。気になった問題などを紹介します。

すべての問題の冒頭に著者のコメントの記載あり、第○問は本の問題番号です。

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

----- <問題、答など> -----

I. 第 1 問（入試問題から愛を込めて まずは挨拶として）

$- \sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$ で定義される 2 つの関数
 $f(x) = \sqrt{|x|} + \sqrt{5 - x^2}$ 、 $g(x) = \sqrt{|x|} - \sqrt{5 - x^2}$ に対し、次の問いに答えよ。
 (1) 関数 $f(x)$ と $g(x)$ の増減を調べ、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの概形をかけ。
 (2) 2 つの曲線 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。 信州大学

(解) (1) (グラフの概況)

- ① y 軸対称 ② y 切片 $(0, \pm\sqrt{5})$ 、x 切片 $(\pm(\sqrt{21}-1)/2, 0)$
 ③ 最高の点 $(\pm 1, 3)$ ④ $(\pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{5})$ で接線は y 軸に平行
 (2 つのグラフがつながるハート形のグラフを楽しんでください。)

(2) 5π

II. 第 7 問（ローカルルールの押しつけ）

次の①から③はそれぞれある規則性にもとづいて数が並んでいます。□にあてはまる数を書きなさい。

① 5 9 13 □ 21

② 4096 1024 256 64 □

③ 3 5 8 13 21 □ 55

お茶の水女子大学附属中学校

(最初に感想) ①、②はいいが、③で階差をとったが、第 2 階差で???、フィボナッチかな?

(参考 1) 「寄り道-4 2017. 9. ?」 10 段ある階段の昇り方とフィボナッチ数列

(本の答から) あなたのラッキーナンバー（出題者が想定しているのは、① 17、② 16、③ 34
 のようですが） (本の解説から) 答は無数にあるのに・・・

(参考 2) 「VI-1 2017. 3. α」ラグランジェの補間公式を利用すれば無数の答ができる。

III. 第 9 問（根性さえあれば小学生でも解ける東大の問題）

3 以上 9999 以下の奇数 a で、 $a^2 - a$ が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。
 東京大学

(解) $a(a-1)$ は連続 2 整数(奇数と偶数)の積、

$a(a-1)$ が $10000 = 2^4 \times 5^4 = 16 \times 625$ で割り切れ、 a が奇数だから、

$a = 625P$ 、 $a-1 = 625P-1 = 16Q$ 、 P は奇数で Q は整数

$$\therefore Q = 39P + \frac{p-1}{16} \quad a \text{ は奇数で、} 3 \leq a \leq 9999 \text{ だから、}$$

$1 \leq P < 16$ より $P = 1$ 、 $Q = 39$ (答) $a = 625$ (参考 $625 \times 624 = 390000$)

(本から) $a = 3, 5, 7, \dots$ と 9999 までの場合を実際調べてみれば・・・、時間と根性さえあれば小学生でも解ける問題か。(影の声 時間と根性があっても・・・?)

IV. 第 11 問（どうして 1 になるのか、誰も知らない）

(問題は省略) 「VI-3 2017. 4. α」で紹介した「コラッツの予想」の問題です。

(参考) 自然数を 1 つ考える ① 偶数なら 2 で割る、② 奇数なら 3 倍して 1 を足す

(例) $3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ では、7 は?、27 は?

「コラッツの予想：どんな自然数でも、いつかは $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ の繰り返しになる。」

V. 第 13 問（フェルマーの大定理もどき）

(1) 任意の自然数 a に対し、 a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

(2) 自然数 a, b, c が $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たすと仮定すると、 a, b, c はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。

(3) $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たす自然数は存在しないことを証明せよ。 九州大学

(証明略) 何とかかなりそうです。本では rad という新しい概念が登場する「ABC 予想とフェルマーの定理の証明」を紹介。(理解不能)

VI. 第15問 (1 が 99 個並ぶ！)

次の命題 P を証明したい。

命題 P 次の条件 (a)、(b) をともに満たす自然数 (1 以上の整数) A が存在する。

(a) A は連続する 3 つの自然数の積である。

(b) A を 10 進法で表したとき、1 が連続して 99 回以上現れるところがある。

以下の問いに答えよ。

(1) y は自然数とする。このとき不等式

$$x^3 + 3yx^2 < (x + y - 1)(x + y)(x + y + 1) < x^3 + (3y + 1)x^2$$

が成り立つような正の実数 x の範囲を求めよ。

(2) 命題 P を証明せよ。

東京大学

(解の概略)

(1) 不等式の左項<中央項から $x > 0$ 、また、中央項<右項の解と合わせて

$$x > \frac{3y^2 - 1 + \sqrt{(3y^2 - 1)^2 + 4y(y^2 - 1)}}{2}$$

(2) (本の解説を参考にして) $3y = 11 \cdots 1$ $x = 10^n$ $n \geq 99$ で(1)を満たす x

$$\begin{aligned} x^3 + 3yx^2 &= 1 \overset{\text{0} \cdots \text{0}}{\underset{\text{n-99個}}{\leftarrow}} \overset{\text{0} \cdots \text{11}}{\underset{\text{99個}}{\leftarrow}} \overset{\text{0} \cdots \text{0}}{\underset{\text{2n個}}{\leftarrow}} \\ x^3 + (3y+1)x^2 &= 1 \overset{\text{0} \cdots \text{0}}{\underset{\text{n-99個}}{\leftarrow}} \overset{\text{0} \cdots \text{12}}{\underset{\text{98個}}{\leftarrow}} \overset{\text{0} \cdots \text{0}}{\underset{\text{2n個}}{\leftarrow}} \quad \text{より、} \\ (x + y - 1)(x + y)(x + y + 1) &= 1 \overset{\text{0} \cdots \text{0}}{\underset{\text{n-99個}}{\leftarrow}} \overset{\text{0} \cdots \text{1}}{\underset{\text{99個}}{\leftarrow}} \overset{\text{1} \cdots \text{11}}{\underset{\text{2n個}}{\leftarrow}} \cdots \end{aligned}$$

(本にならって参考例) $3y = 111$ とすると、 $y = 37$ (1)より $x > 4108.33 \cdots$

$x = 10000$ とすれば、 $x + y = 10037$

$$10036 \times 10037 \times 10038 = 1011141110616 \quad ??? \quad (2 \text{ 箇所に } 111 \text{ あり})$$

(参考) $1036 \times 1037 \times 1038 = 1115156616$ (×は電卓が使えず、表計算で)

(感想) どこからこの問題のような発想が生まれるのか不思議な感じがしました。また、

1 が 99 個も並ぶなんて・・・(1)の不等式はどこから・・・妙に感心しました。

VII. 第16問 (世界一短い入試問題?)

$\tan 1^\circ$ は有理数か。

京都大学

(解) $\tan 1^\circ = q/p$ (p, q は自然数) とおく。

$$\tan(n^\circ + 1^\circ) = \frac{\tan n^\circ + \tan 1^\circ}{1 - \tan n^\circ \tan 1^\circ} = \frac{p \tan n^\circ + q}{p - q \tan n^\circ}$$

帰納法により、 $\tan 2^\circ$ 、 $\tan 3^\circ$ 、・・・、 $\tan n^\circ$ は有理数になる。

$\tan 30^\circ = 1/\sqrt{3}$ は無理数だから矛盾

(本文から)・・・正答率は低かったと伝えられている。・・・入試問題の傑作のひとつだろう。

VIII. 第17問 (円周率と「ゆとり教育」)

円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。

東京大学

(方針など) 半径 1 の円の周の長さは 2π 、面積は π 、正 n 多角形の外周、面積と比較すればよい。

(参考) 「VII-寄り道 2017.5. x」で扱っています。

(本より) 2002 年改訂 小学校学習指導要領 手計算の場合は円周率を 3 としてよい・・・

翌 2003 年の東京大学の数学の入試に (この問題が) 出題されたのである。・・・(ナルホド!)

IX. 第20問 (天文学者の寿命を2倍にした計算)

以下の問いに答えよ。

(1) 正の実数 a、b、c について次の不等式が成立することを示せ。

$$\frac{\log a}{a} + \frac{\log b}{b} + \frac{\log c}{c} < \log 4$$

(2) 自然数 a、b、c、d の組で次を満たすものをすべて求めよ。

$$a^{bc} b^{ca} c^{ab} = d^{abc}, \quad a \leq b \leq c, \quad d \geq 3$$

熊本大学

(本によれば) 冒頭の「寿命を2倍にした計算」とは対数計算と計算尺を指すようだ。

(解) (1) $y = \frac{\log x}{x}$ 、 $y' = -\frac{\log x - 1}{x^2}$ $x = e$ で最大値 $\frac{1}{e}$

$$\therefore \frac{\log a}{a} + \frac{\log b}{b} + \frac{\log c}{c} \leq \frac{3}{e} \quad \log 4 = 2 \log 2 > \frac{3}{e} \quad \text{であればよい。}$$

$$\frac{3}{2e} = 0.5518 \cdots < 0.6 \quad \text{だから} \quad \log 2 > \frac{3}{5} \quad \text{を示せばよい。}$$

$$2^5 = 32 > 27 = 3^3 > e^3 \quad \text{より成立。}$$

- (2) 対数をとって比較すればよい(途中計算略)。x が自然数のとき

$$\frac{\log x}{x} \text{ は } x = 3 \text{ のとき最大値 } \frac{\log 3}{3}$$

$$\log d = \frac{\log a}{a} + \frac{\log b}{b} + \frac{\log c}{c} \leq \log 3 \quad (\text{答}) \quad a = b = c = d = 3$$

X. 第22問(受験参考書が間違えた問題)

ジョーカーを除いた除いたトランプ 52 枚の中から 1 枚のカードを抜き出し、表を見ないで箱の中にしまった。そして、残りのカードをよく切ってから 3 枚抜き出したところ、3 枚ともダイヤであった。このとき箱の中のカードがダイヤである確率を求めよ。 早稲田大学

(解) 残り 52 - 3 = 49 枚中 ダイヤは 13 - 3 = 10 枚で、確率は 10/49 となる。

(本文から) ……ある受験参考が正解を 1/4 と解説したこともあって、当時ずいぶん話題になったという。……

(本では) 条件付き確率のやり方で 10/49 になるきちんとした解説を加えている。その後、次の話題 <全米騒然!「モンティ・ホール問題」の考え方> を紹介。

(本から) この条件付き確率の問題で、アメリカ中が大騒ぎになった事件があった。テレビの人気司会者モンティ・ホールが司会をするゲーム番組が論争の発端だったので、……

「数学散歩 IV-1 2015. 12. β 」で扱っており、再度、紹介する。

<第35話>から 「ヤギ問題とベイズの公式」

クイズ番組での話。最終戦に勝ち残った回答者は3つのドアから1つを選ぶ。どれか1つのドアの向こうには賞品の車が隠されている。残りの2つのドアの背後には、はずれの印にヤギが置かれている。回答者はまずドア1を選んだ。すると司会者は、ドア3を開けて見せるとヤギが置かれていた。回答者には、もう1度変更のチャンスが与えられる。ドア1を変更してドア2にした方がよいかどうか。

(略解)

ドア	A	B	C
①	車	ヤギ	ヤギ
2	ヤギ	車	ヤギ
3	ヤギ	ヤギ	車

ドアと車、ヤギの関係は A、B、C の3通り。

回答者はドア1を選ぶ確率は 1/3

ドアを変更しない場合、賞品が車の確率は変化せず。

変更する場合、回答者は2か3のドアに

A : 司会者が2、3のドアどちらでも、回答者はヤギ

B : 司会者は3で、回答者は2に変更し、車

C : 司会者は2で、回答者は3に変更し、車

車の確率は 2/3 だから、変更した方がよい。

XI 第24問(コイントス問題に潜む罠)

硬貨を n 枚投げて、毎回、表裏のいずれの面が出たか記録する。このとき、同じ面が連続して出た回数の最大値を M とおく。

(1) n = 3 のとき、M = 2 となる確率を求めよ。

(2) n = 4 のとき、M の期待値を求めよ。

(3) n = 6 のとき、M = 3 となる確率を求めよ。

法政大学

(感想) 書き出した方が早い。2進法で0表、1裏として、

(1) 000 001 010 011 100 101 110 111 4/8 = 1/2

(2) 0000 0001 0010 0011 0100 0101 0110 0111
4 3 2 2 2 1 2 3 計 19

1000 1001 1010 1011 1100 1101 1110 1111
3 2 1 2 2 2 3 4 計 19 38/16 = 19/8

(3) (2)のように、すべて書き出した方が早くて間違いがないようです。

000100 000101 000110 000111 001000 001110
010001 010111 011000 011100 011101
100010 100011 100111 101000 101110
110001 110111 111000 111001 111010 111011 22/64 = 11/32

000000	000001	000010	000011	000100	000101	000110	000111
001000	001001	001010	001011	001100	001101	001110	001111
010000	010001	010010	010011	010100	010101	010110	010111
011000	011001	011010	011011	011100	011101	011110	011111
100000	100001	100010	100011	100100	100101	100110	100111
101000	101001	101010	101011	101100	101101	101110	101111
110000	110001	110010	110011	110100	110101	110110	110111
111000	111001	111010	111011	111100	111101	111110	111111

他にもいろいろ話題があります。興味が湧きましたら、直接この本を手にして楽しんでください。