数学散歩　Ⅵ－３　　　　　　　　　　　２０１７．４．α　　岐阜市　村山鋍司

<気になっていたどうでもいいこと>　「言っていいこと、悪いこと（永 六輔）」から
「１年の始まりは、１月１日の０時０分０秒からです。　でもなぜ１月１日なの？　ほんとなら、０月０日の０時０分０秒なんじゃないでしょうか。　ものの数え方って、１から始める数え年型と、０から始める満年０型があるんですねえ」　・・・ヨーロッパでは１階がグラウンドで、２階が１階になっています。つまり「ビルの１階」といえば日本でいうと２階のことなんです。
（エレベータには０階がなく、１階の下が地下１階（Ｂ１）です。　西暦０年は？　平成０年は？
学校は第１学年からで、住所も１丁目１番地、赤んぼは０歳から・・・）

《三角定規の２種類の関係》　何か気になりました。描いてみてください。大小は？（答は後掲）

―　数学教養書の中から　―
「数のエッセイ　一松 信（中央公論社）」（その３）
ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

《目覚ましの問題》

自然数を１つ考える。その数が　①　偶数なら２で割る　②　奇数なら３倍して１を足す この操作を繰り返すとどうなりますか。何か規則がありますか。　　　（コラッツの問題）

（いろいろやってみてください。）
（関連して、私立中学（神奈川学園中学）の入試問題を次に紹介します。）
「やじうま入試数学　金重明(BLUE BACKS)」（全 29 問中の第 11 問として紹介）から

⑴　　最初の整数が７のとき、４回操作して得られる整数を求めよ。 ⑵　　最初の整数が１３のとき、何回の操作で終了するか。 （次の問には、操作を　③　１になったところで終了する　を追加して） ⑶　　この操作を７回行うと１になる整数をすべて求めよ。

（⑶の問題のアイデアが気に入りました。楽しめます。　解答は後掲）

《飛び入りの問題》　いつもの店で客さんからの質問

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{7} + 2\left(\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{13} + \tan^{-1}\frac{1}{34} + \tan^{-1}\frac{1}{55}\right)$$　正しい？

（楽しめました。）答　正しい。　　　（加法定理で何とかなります。証明は後掲）

<問題と考察など>

「百五減算」（８０頁～８６頁）
（本から）　昔の中国の数学の本に、次のような問題が出ている ---------

問題　泥棒たちが盗品を分配しているのを盗み聞きしたが、なかなかうまく分けられない。 ３つずつ分けると２つ余り、５つずつ分けると４つ余り、７つずつ分けると１つ余る。 全部でいくつか？

（受験生気分でやってみた）

$N = 3x + 2 = 5y + 4 = 7z + 1$ 、x、y、z は自然数のとき、 N を求めよ。

（ということである。）
$3x + 2 = 5y + 4$ について　$3x - 5y = 2$　　$x = 4$、$y = 2$　　は１つの解
$x = 5m + 4$、$y = 3m + 2$　　は一般解
$5y + 4 = 7z + 1$ について　$7z - 5y = 3$　　$y = 5$、$z = 4$　　は１つの解
$y = 7n + 5$、$z = 5n + 4$　　は一般解
$y = 3m + 2 = 7n + 5$　　より　$7n = 3(m - 1)$、 $n = 3k$ とすると $m = 7k + 1$
$x = 5m + 4 = 35k + 9$　、 $y = 3m + 2 = 21k + 5$　、 $z = 5n + 4 = 15k + 4$
∴　　$N = 3x + 2 = 5y + 4 = 7z + 1 = \underline{105k + 29}$　　問題の答は、$k = 0$ として 29 個
（確認）　$29 = \underline{3}\times 9 + \underline{2} = \underline{5}\times 5 + \underline{4} = \underline{7}\times 4 + \underline{1}$
（本では、別の説明あり。）（本より） N には 105 の倍数の自由度があるが、・・・、
この問題は百五減算という名で知られている。必要なら（105 を超えれば）105 を引くからである。・・・

◎ 百五減算では ：　（合同式）
$x \equiv 2 \pmod 3$、$y \equiv 4 \pmod 5$、$z \equiv 1 \pmod 7$ のとき、解は $N \equiv 29 \pmod{105}$

＜連立一次合同式に関する定理―中国式剰余定理＞　（本を参考にまとめた。）

$x \equiv a_1 \pmod{p_1}$ 、 $x \equiv a_2 \pmod{p_2}$ 、・・・、 $x \equiv a_n \pmod{p_n}$ があるとき、
p_1、p_2、・・・、p_n が互いに素とする。このとき任意の a_1、a_2、・・・、a_n に対して
連立一次合同式は必ず解をもち、しかも、 p_1、p_2、・・・、p_n の最小公倍数 p の倍数
を除いて一意的に定まる。

◎ 補助定理 ：

a と b とが互いに素な整数ならば、$au + bv = 1$ を満たす整数の組 u、v がある。

（参考「数学散歩 V-12 」（ユークリッド互除法））

◎ 合同式の定理の証明（本を参考）（数学的帰納法による）：

（Ⅰ） $n = 1$ のとき　自明（$x = a_1$ とすればよい。）

（Ⅱ） $n - 1$ までできたとし、 p_1、・・・、p_{n-1} に対する解 y が見つかったとする。

（ここで、 $y \equiv a_1 \pmod{p_1}$ 、・・・、 $y \equiv a_{n-1} \pmod{p_{n-1}}$ ）

p_n と、積 $p_1...p_{n-1}$ は互いに素だから補助定理により、適当に整数 u、v をとれば、
$p_1 \cdots p_{n-1}u + p_n v = 1$ とできる。　$x = a_n p_1 \cdots p_{n-1}u + yp_n v$ とおく。

p_n について　$x \equiv a_n p_1 \cdots p_{n-1}u = a_n(1 - p_n v) \equiv a_n \pmod{p_n}$

p_i （$i = 1$、2、・・・、$n-1$）について

$x \equiv yp_n v = y(1 - p_1 \cdots p_{n-1}u) \equiv y \equiv a_i \pmod{p_i}$　　よって成立

＜百五減算の問題に戻って＞　（定理の証明にしたがって）

$n = 3$、 $p_1 = 3$、 $p_2 = 5$、 $p_3 = 7$、 $x \equiv \ell \pmod 3$、 $x \equiv m \pmod 5$、 $x \equiv n \pmod 7$
の解は $x = 70\ell + 21m + 15n$ を計算し、105 より大きければ 105 の倍数を引く。

⑴ $(a_1, a_2, a_3) = (1, 0, 0)$ の解は　$x = 70$

$n = 1$ のとき　$x = a_1 = 1$

$n = 2$ のとき　$3u + 5v = 1$　$u = 2$、$v = -1$ 、 $y = a_1 = 1$

$x = a_2p_1u + a_1p_2v = 0\times3\times2 + 1\times5\times(-1) = -5 \equiv 10 \pmod{15}$

$n = 3$ のとき　$3\times5u + 7v = 1$　$u = 1$、$v = -2$ 、 $y = -5 \equiv 10 \pmod{15}$

$x = a_3p_1p_2u + yp_3v = 0\times3\times5\times1 + (-5)\times7\times(-2) = 70$

$70 \equiv 1 \pmod 3$ 、 $70 \equiv 0 \pmod 5$ 、 $70 \equiv 0 \pmod 7$

（本より）　他の 21、15 も同様にして・・・これは読者諸氏への演習問題としておこう。

⑵ $(a_1, a_2, a_3) = (0, 1, 0)$ の解は　$x = 21$

$n = 1$ のとき　$x = a_1 = 0$

$n = 2$ のとき　$3u + 5v = 1$　$u = 2$、$v = -1$ 、 $y = a_1 = 0$

$x = a_2p_1u + a_1p_2v = 1\times3\times2 + 0\times5\times(-1) = 6$

$n = 3$ のとき　$3\times5u + 7v = 1$　$u = 1$、$v = -2$ 、 $y = 6$

$x = a_3p_1p_2u + yp_3v = 0\times3\times5\times1 + 6\times7\times(-2) = -84 \equiv 21 \pmod{105}$

$21 \equiv 0 \pmod 3$ 、 $21 \equiv 1 \pmod 5$ 、 $21 \equiv 0 \pmod 7$

⑶ $(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 1)$ の解は　$x = 15$

$n = 1$、2 のとき　$x = 0$

$n = 3$ のとき　$3\times5u + 7v = 1$　$u = 1$、$v = -2$ 、 $y = 0$

$x = a_3p_1p_2u + yp_3v = 1\times3\times5\times1 + 0\times7\times(-2) = -84 \equiv 15$

$15 \equiv 0 \pmod 3$ 、 $15 \equiv 0 \pmod 5$ 、 $15 \equiv 1 \pmod 7$

⑴、⑵、⑶より　$x = 70\ell + 21m + 15n \pmod{105}$

$x \equiv \ell \pmod 3$、 $x \equiv m \pmod 5$、 $x \equiv n \pmod 7$

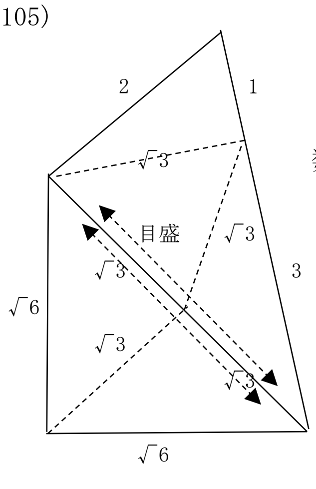
よって、最初の「百五減算」の問題では、　$\ell = 2$、$m = 4$、$n = 1$ とすると、

$x = 140 + 84 + 15 = 239 \equiv \underline{29} \pmod{105}$

《三角定規の２種類の関係》

最大辺に対する高さは$\sqrt{3}$で等しい。

目盛が書いてある辺は重なる。



数字は線分の長さ

《目覚ましの問題》　　《ウォーミングアップです》

1 →　4 →　2 →　1 →　4 →　2 →　1（以下、繰り返し）
2 →　1 →　4 →　2 →　1（以下、繰り返し）
3 →　10 →　5 →　16 →　8 →　4 →　2 →　1（以下、繰り返し）
4 →　2 →　1 →　4 →　2 →　1（以下、繰り返し）
5 →　16 →　8 →　4 →　2 →　1（以下、繰り返し）
6 →　3 →（前述）、　8 →　4 →（前述）、　10 →　5 →（前述）、
7、9 についても最後は　　4 →　2 →　1　　の繰り返しになります。確認されたい。

「コラッツの予想」：「どんな自然数についても、いつかは 4 → 2 → 1 の繰り返しになる。」

（霰数。 10^{16} まで正しいことが確認されているとのこと。数学未解決問題の１つ。）

＜私立中学の入試問題の答＞
（答）　⑴　１７　⑵　９回　⑶　（逆にたどる）３、２０、２１、１２８

（前記の本にあった数「２７」は如何ですか？何回の操作で終了しますか？）

《飛び入りの問題》　いつもの店でお客さんからの質問

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{7} + 2\left(\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{13} + \tan^{-1}\frac{1}{34} + \tan^{-1}\frac{1}{55}\right)$$ 正しい？

（証明）

$\tan^{-1}\frac{1}{a} = \tan^{-1}\frac{1}{b} + \tan^{-1}\frac{1}{x}$　a、b（a＜b）が自然数のとき自然数 x を求める。

$\tan^{-1}\frac{1}{a} = \alpha$ 、 $\tan\alpha = \frac{1}{a}$　などとおいて　$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$ を利用

$$\frac{1}{x} = \tan(\alpha-\beta) = \frac{b - a}{ab + 1} = \frac{1}{(ab+1)/(b-a)} \qquad \therefore\ x = \frac{ab+1}{b-a}$$

$\tan(\pi/4) = 1$ 、$a = 1$、$b = 2$ として、　$x = 3$ だから

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$$ （オイラー）

$a = 2$、$b = 3$ として、　$x = 7$ だから

$$\tan^{-1}\frac{1}{2} = \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$$ 合わせて

$$\frac{\pi}{4} = 2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$$ （クラウゼン）

$a = 3$、$b = 5$ として、　$x = 8$ だから　　$a = 8$、$b = 13$ として、　$x = 8$ だから

$$\tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{8} \qquad \tan^{-1}\frac{1}{8} = \tan^{-1}\frac{1}{13} + \tan^{-1}\frac{1}{21}$$

$a = 21$、$b = 34$ として、　$x = 55$ だから

$$\tan^{-1}\frac{1}{21} = \tan^{-1}\frac{1}{34} + \tan^{-1}\frac{1}{55}$$ 合わせて

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{7} + 2\left(\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{13} + \tan^{-1}\frac{1}{34} + \tan^{-1}\frac{1}{55}\right)$$

＜参考＞ $\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{3}{4}$　　　$\tan^{-1}\frac{3}{4} = 2\tan^{-1}\frac{1}{3}$