数学散歩　Ⅵ - 4　　　　　　　　　　２０１７．４.β　　岐阜市　村山錞司

―　数学教養書の中から　―

「数のエッセイ　一松 信（中央公論社）」（その４）

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

《「Ⅵ-2」での問（４を４個使って１から９までの数をつくる）の答 10 = 不明？について》

ルールが不明確で、いいのか悪いのか分からないが、思いついた３つの例を紹介する。

$10 = 4 + 4 + 4 - \sqrt{4}$ 、$4 \times \sqrt{4} + 4 \div \sqrt{4}$ 、$4 \times 4 - 4! \div 4$

＜問題と考察など＞

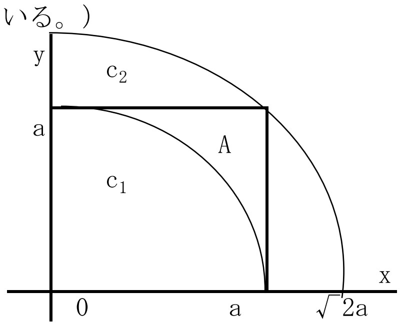
「円周率をめぐって」（８９頁～１１６頁）頭が痛くなりそうな内容です。流し読みしてください。

＜正規分布の定積分＞

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} dx = \sqrt{\pi}}$$

（本によれば）　この定積分の計算法はたいていの積分学の教科書に出ているから、ここには省略するが・・・（再勉強で、調べてみた。解析概論（高木貞治）では($\sin^n x$ の 0～π/2 の部分積分による）Wallis の公式に絡めて証明しており、参考にされたい。また、微分積分学（末綱、荒又）の下巻では、（極座標の）二重積分を利用して証明している。）

（証明の概略）

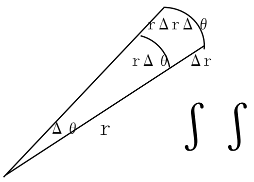


$$\iint_{c_1} e^{-(X^2+y^2)} dxdy < \iint_{A} e^{-(X^2+y^2)} dxdy < \iint_{c_2} e^{-(X^2+y^2)} dxdy$$

ここで

$$\iint_{A} e^{-(X^2+y^2)} dxdy = \int_0^a e^{-X^2} dx \int_0^a e^{-y^2} dy$$

$$= \left\{ \int_0^a e^{-X^2} dx \right\}^2$$



また、極座標を利用して、

$$\iint_{c_1} e^{-(X^2+y^2)} dxdy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a e^{-r^2} r\,dr = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2})$$

同様に

$$\iint_{c_2} e^{-(X^2+y^2)} dxdy = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2a^2})$$

よって

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2}) < \left\{ \int_0^a e^{-X^2} dx \right\}^2 < \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2a^2})$$

$a \to \infty$ とすれば　$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-X^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$　より　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} dx = \sqrt{\pi}$

◎ 円周率　：（本から）日本語（あるいは中国語）では「円周率」という簡にして要を得た述語があるが、西欧語には、こんなうまい語はない。・・・

◎ 中心　：（本から）われわれの周囲に、円形の物体はたくさんあるけれども、その中心を明示されている場合はわりに少ないのではなかろうか。・・・

◎ 多少ともπの値を理論的に算出したアルキメデスの最古の記録　：円に内接および外接する正六角形の周からはじめて、次々に辺数が２倍の正多角形の周を正九十六角形まで計算し、　$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$　を得た。

（平成２５年４月末の朝日（朝刊）に「アルキメデスはこう考えた」の記事を見かけ、インターネットで「円周率」を検索したら、「アルキメデスによる円周率の計算」があり、プリントして楽しみました。参考になりました。）

◎ ライプニッツ(Leibniz)の級数　：

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots$$

（級数への道筋（概略））

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots$$　0 から x まで積分して

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$　x = 1 として級数を得る。

（参考）　「数学散歩 Ⅴ-6、Ⅵ-3」

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} \quad \text{(L.Euler)}$$

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239} \quad \text{(J.Machin)}$$

◎　πの近似値　$\dfrac{355}{113}$　：　（割り算をしてみてください。）

本では突然、何の説明もなしで、この分数を紹介。どこから出たのか不思議？
（後日、岐阜市の図書館で見つけた。（この報告書の最後に紹介））

＜「πが無理数である。」の証明＞　：　「πが有理数であるとすると矛盾する。」を示す。
（この本と「数学の学び方（小平邦彦 編）」を参考に、I.Niven による証明の概略を紹介）

p、n を任意の自然数とし、

$$f(x) = \frac{1}{n!}p^n x^n(\pi-x)^n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k {}_nC_k\, p^n \pi^{n-k} x^{n+k} \quad \cdots(A)$$ とおく。

$0<x<\pi$ のとき　$0<x(\pi-x)<\pi^2$　だから　$0<\sin x\ p^n x^n(\pi-x)^n < p^n\pi^{2n}$

$$\therefore\ 0 < \int_0^{\pi}\sin x\cdot f(x)\,dx = \frac{1}{n!}\int_0^{\pi}\sin x\cdot p^n x^n(\pi-x)^n\,dx < \frac{1}{n!}(p\pi^2)^n\pi$$

任意の実数 a に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$　だから p に対して n を十分大とすれば、

$$0 < \int_0^{\pi}\sin x\cdot f(x)\,dx < 1 \quad \cdots(B)$$

$$\int_0^{\pi}\sin x\cdot f(x)\,dx = \Big[-\cos x\cdot f(x)\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\cdot f'(x)dx = f(\pi)+f(0)+\cdots$$

$$\int_0^{\pi}\cos x\cdot f'(x)dx = \Big[\sin x\cdot f'(x)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\cdot f''(x)dx = -\int_0^{\pi}\sin x\cdot f''(x)dx$$

$$\therefore\ \int_0^{\pi}\sin x\cdot f(x)\,dx = f(\pi) + f(0) - \int_0^{\pi}\sin x\cdot f''(x)dx$$

ここで f(x) は 2n 次式だから、　$f^{(2n+2)}(x) = 0$　より、

$$\int_0^{\pi}\sin x\cdot f(x)\,dx = \cdots = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[f^{(2k)}(\pi) + f^{(2k)}(0)\right]$$

また、$f(\pi-x) = f(x)$ より　$f^{(k)}(\pi-x) = (-1)^k f^{(k)}(x)$　だから　$f^{(k)}(\pi) = (-1)^k f^{(k)}(0)$

$$\int_0^{\pi}\sin x\cdot f(x)\,dx = 2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(2k)}(0) \quad \cdots(C)$$

f(x) は x の n 次の項から 2n 次の項までの多項式だから

$$\begin{cases} f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0 \\ f^{(n+k)}(0) = (-1)^k {}_nC_k \dfrac{(n+k)!}{n!} p^n\pi^{n-k} \quad \cdots(D) \end{cases}$$

(k = 0、1、2、… 、n)

πを有理数とし $\dfrac{q}{p}$ （ p は (A) と同じ ）とすると、　$p^n\pi^{n-k} = p^n q^{n-k}$　は整数で、

(D) より $f^{(k)}(0)$ はすべて整数になり、したがって (C) により　$\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\cdot f(x)\,dx$

は整数となって、(B) に矛盾する。

＜数学こぼれ話—$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明＞

（本には、我々がよく知る方法以外に３通りが紹介されているが、最後の別証３のみ紹介する。）
（別証３）　すべての正の整数は順序を問題にしなければただ１通りの素因数の積に表される。
もし、$\sqrt{2} = m/n$ で $2n^2 = m^2$　ならば、　$2n^2$ は奇数個、m^2 は偶数個の素因数の積に表されるから、分解の一意性に反する。
（本から）　別証３が、最も本質をえぐりだした「エレガントな証明」と思われる。
（私の感想：誰もが頭の中にあるような方法で、何で教科書などになかったのか、不思議？）

＜図書館の本で見て、気になった変な数＞

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ は有理数か、無理数か？　（参考）　$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2$

（もとの問題　「無理数$^{\text{無理数}}$ で有理数となるような数は存在するか。」）

◎　円周率πの近似値　$\dfrac{355}{113}$　について

高校数学で挑戦する和算難題　佐藤健一（東洋書店）　から

零約術

1　関孝和のπの近似分数化

関は　π ＝ 3.1415926 まで正しい値を「規矩要明算法」で示している。

＜関孝和の近似分数化の概要＞　πの値を上の小数として

⑴　π＞ 3 だから最初の近似分数を $\dfrac{3}{1}$ とおく。

⑵　近似分数がπより小さければ、分子に 4 を加え、

〃　πより大きければ、分子に 3 を加え、

分母に 1 を加えて、次の近似分数とする。

$\dfrac{3}{1}$、$\dfrac{7}{2}$、$\dfrac{10}{3}$、$\dfrac{13}{4}$、$\dfrac{16}{5}$、$\dfrac{22}{7}$、$\dfrac{25}{8}$、$\dfrac{32}{10}$、…、$\dfrac{355}{113}$、…、

（本から）・・・、現実の場面では、113355 というきわめて覚えやすいこの値に落ち着いた。