数学散歩　Ⅵ－５　　　　　　　　　　　２０１７．５．α　　岐阜市　村山錞司

―　数学教養書の中から　―

「数のエッセイ　一松 信（中央公論社）」（その５）（最終）

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

《目覚ましの問題》

$xyz = 1$ のとき、$\dfrac{2x}{xy+x+1} + \dfrac{2y}{yz+y+1} + \dfrac{2z}{zx+z+1}$ の値を求めよ。

－・－・－＜問題と考察など＞－・－・－・－・－・－・－・－・－・－・－・－

＜数学こぼれ話―三角形の面積の計算式＞

問題　平面上の三頂点　(x_0, y_0) 、(x_1, y_1) 、(x_2, y_2) の三角形の面積を計算するためには、どういう公式を使うのがよいか？

（本文では）少し考えてから後の答をみてほしい。（として、答を、優、可、落第と評価。答は後掲）

「正多角形のタイル張り」（１１９頁～１４０頁）

（参考）　「数学散歩 Ⅳ-9 」タイル張り―五角形、六角形のタイルでもすき間なくきっちり・・

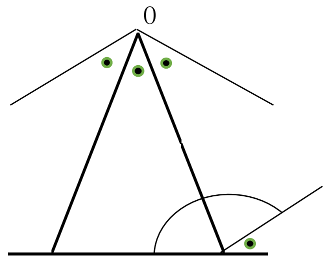
（このときは正多角形でなく、一般の多角形についてであった。）

＜本の冒頭の問題から＞

問題　互いに合同な正多角形を隙間も重なりもないように並べて、平面を完全に埋める仕方は何通りあるか。

（本によれば）それが３種類に限ることは、どの教科書にも、また、どの本にも出ている。・・・

◎ 準備として　平面上の正ｍ角形の一つの内角を求める。



一辺に対する中心角は　$\dfrac{360°}{m}$　だから、

１つの内角は　$180° - \dfrac{360°}{m} = 360°\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{m}\right)$

◎ （本と異なる方法で証明）

１点の周りに n 個の正ｍ角形が集まるとすると、

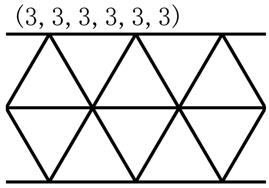
$360°\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{m}\right) \times n = 360°$　より　$\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{2}$

$mn = 2(m + n)$　∴ $(m - 2)(n - 2) = 4$　$m \geqq 3$ だから

$m - 2 = 1$、2、4　$m = 3$、4、6　（能力不足で、図の<u>辺の長さに長短のズレがあり</u>ます。）

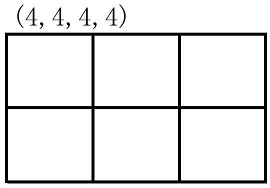
よって　$(m, n) = (3, 6)$、$(4, 4)$、$(6, 3)$

(3,3,3,3,3,3)



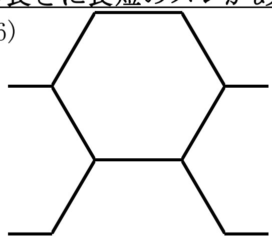
６個の正三角形

(4,4,4,4)



４個の正方形

(6,6,6)



３個の正六角形　　の３種類

（本より）・・記憶のよい方は、前項での計算と似たのを・・それは正多面体の計算である。

このときは条件が不等式　$\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{2}$　だったのが、こんどは等式になっている。

（正多面体では）　　　　　　　　　　（正多角形になると）

（本ではこの後、数行にわたって記述があるが意味不明？なお、正多面体が５種類に限ることには触れられていないので次の問にした。）

問題　正多面体は５種類に限られることを示せ。

（私の答案）⑴ １点に集まる正 m 角形の内角の和は、360° より小で、n 個が集まるとすると、

$360°\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{m}\right) \times n < 360°$　だから、$\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{2}$

⑵ $n \geqq 3$ だから　$\dfrac{1}{m} > \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} \geqq \dfrac{1}{6}$　∴ $m < 6$　　$m = 3$、4、5

⑶ $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{m} = \dfrac{m - 2}{2m}$　∴ $n < \dfrac{2m}{m - 2}$

(ｲ)　$m = 3$（正三角形）のとき　$3 \leqq n < 6$ で $n = 3$、4、5

$(m, n) = (3, 3)$　正四面体(3－1)　、$(m, n) = (3, 4)$　正八面体(4－4)　、

$(m,n) = (3,5)$　　正二十面体(5−5・5−5)

(ﾛ)　$m = 4$（正方形）のとき　　$3 \leqq n < 4$ で $n = 3$

$(m,n) = (4,3)$　　立方体(1−4−1)

(ﾊ)　$m = 5$（正五角形）のとき　$3 \leqq n < 10/3$ で $n = 3$

$(m,n) = (5,3)$　　正十二面体(1−5−5−1)　　　　　以上の５種類

（後の（ ）内の数の並びは正多角形の面の並び方の例）

＜平面のタイル張りに戻って、２種類以上の正多角形を使ったらどうか？＞

（条件として）

⑴ 使用する正多角形の辺の長さはすべて相等しい。

⑵ 正多角形の頂点どうしは１点に集まり、辺の途中に他の正多角形の頂点はない。

⑶ 正多角形（の頂点）が集まる点では、どの点でも、その図形は、みな合同。

（１点に集まる正多角形の数によって分類）以下、概略

⑴ ６個　正三角形が６個　(3,3,3,3,3,3)　　(図は前掲)

⑵ ５個　正三角形が４個とすると、残りは $360° - 4\times60° = 120°$　　正六角形１個 (6,3,3,3,3)

正三角形が３個とすると、残りは $360° - 3\times60° = 180°$　　正方形２個 (4,4,3,3,3)

⑶ ４個　正 p_1、p_2、p_3、p_4 角形　($p_1 \geqq p_2 \geqq p_3 \geqq p_4 \geqq 3$)　とする。

正 m 角形の１つの内角は　$360°\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right)$　だから

$$360°\left(\frac{1}{2}\times4 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3} - \frac{1}{p_4}\right) = 360° \quad より \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} = 1$$

$$1 = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} \leqq \frac{4}{p_4} \qquad \therefore\ 3 \leqq p_4 \leqq 4 \text{ で } p_4 = 3、4$$

(ｲ)　$p_4 = 4$ のとき　p_1、p_2、p_3 のどれかが５以上になれば左辺は１より小だから

$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 4$　　正方形４個　(4,4,4,4)（図は前掲）

(ﾛ)　$p_4 = 3$ のとき　$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \frac{2}{3} \leqq \frac{3}{p_3}$、$p_3 \leqq \frac{9}{2}$　　$\therefore\ p_3 = 3、4$

$p_3 = 4$ のとき同様にして　$p_1 = 6$、$p_2 = 4$

正六角形１個、正方形２個、正三角形１個　　(6,4,4,3)

$p_3 = 3$ のとき　$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{3} \leqq \frac{2}{p_2}$、$p_2 \leqq 6$　　$\therefore\ p_2 = 3、4、5、6$

$p_2 = 6$　　$p_1 = 6$　　正六角形２個、正三角形２個　(6,6,3,3)

$p_2 = 5$　　$p_1 = 7.5$　　×

$p_2 = 4$　　$p_1 = 12$　　正十二角形１個、正方形１個、正三角形２個　(12,4,3,3)

$p_2 = 3$　　$p_1 = 0$　　×

⑷ ３個　正 p_1、p_2、p_3 角形　($p_1 \geqq p_2 \geqq p_3 \geqq 3$)　とする。

$$360°\left(\frac{1}{2}\times3 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3}\right) = 360° \quad より \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \frac{1}{2} \leqq \frac{3}{p_3}、\ p_3 \leqq 6 \qquad \therefore\ p_3 = 3、4、5、6$$

$p_3 = 6$ のとき　$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{3} \leqq \frac{2}{p_2}$、$p_2 \leqq 6$　　$\therefore\ p_1 = p_2 = 6$

正六角形３個　　(6,6,6)　　(図は前掲)

（以下、同様にして結果のみ）

$p_3 = 5$ のとき　　(7.5,6,5) ×、　正十角形１個、正五角形２個　(10,5,5)

（以後、図形名称略）

$p_3 = 4$ のとき　　(8,8,4)、(28/3,7,4)×、(12,6,4)、(20,5,4)

$p_3 = 3$ のとき　　(12,12,3)、(66/5,11,3)×、(15,10,3)、(18,9,3)、

(24,8,3)、(42,7,3)

⑴〜⑷をまとめて　　６個；(3,3,3,3,3,3)(図済)　　５個；(6,3,3,3,3)、(4,4,3,3,3)

４個；	(4,4,4,4)(図済)	３個；	(6,6,6)(図済)	(20,5,4)×	(24,8,3)×
	(6,4,4,3)		(10,5,5) ×	(12,12,3)	(42,7,3)×
	(6,6,3,3)		(8,8,4)	(15,10,3)×	
	(12,4,3,3)×		(12,6,4)	(18,9,3)×	

失格（×）の７組：

(10,5,5)　、　(20,5,4)　、　(15,10,3)、　(18,9,3)　、　(24,8,3)　、　(42,7,3)

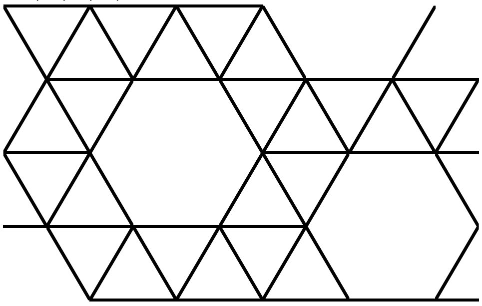
　　については、隙間ができるなどにより失格

(12,4,3,3)　の組が落第というのを証明するのは少し面倒・・・

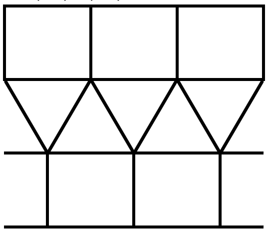
　(以下、２頁余りにわたって説明　（省略）)

(参考図)（能力不足で、図の辺の長さに長短のズレがあります。)

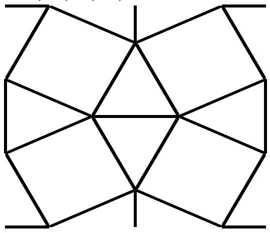
(6,3,3,3,3)



(4,4,3,3,3)　その１

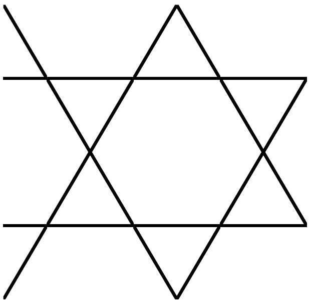


(4,4,3,3,3)　その２

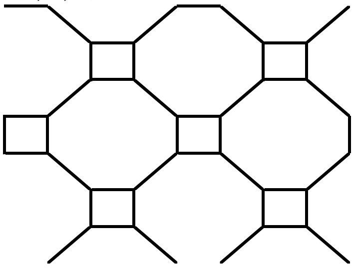


（２通りあり）

(6,6,3,3)



(8,8,4)



（本当は、縦=横=斜め）

(6,4,4,3)
(12,12,3)
(12,6,4)
については能力不足により略
（定規とコンパスで描いて
みてください。）

＜数学こぼれ話—三角形の面積の計算式＞（答の概略）

問題　平面上の三頂点　$(x_0\,,\ y_0)$　、　$(x_1\,,\ y_1)$　、　$(x_2\,,\ y_2)$　の三角形の面積を計算するためには、どういう公式を使うのがよいか？

(参考：「数学散歩 Ⅱ-5」 問題２８、例１０)

【優】　　（本より　次を即座に思いついたら「優」）

$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$ の絶対値÷２、あるいは展開して $\left|\ (x_1-x_0)(y_2-y_0) \quad - \quad (x_2-x_0)(y_1-y_0)\ \right| \times 0.5$

【可】　　（本より　次を思いついたらかろうじて「合格」といったところ。）

$a = \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2}$　、　$b = \sqrt{(x_2-x_0)^2 + (y_2-y_0)^2}$　、　$c = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

$s = (a + b + c) / 2$　　から

　ヘロンの公式　　面積 $= \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$　　や

　２辺夾角の公式　　$\theta = \tan^{-1}\ (y_2-y_0)/(x_2-x_0) - \tan^{-1}\ (y_1-y_0)/(x_1-x_0)$

　　　面積 $= (ab \sin\theta) / 2$

【落第】　面積 = （底辺）×（高さ）÷２　　だが、高さの公式はどうだったっけ？・・・

　　は落第である。

・・・１つの問題にももっと良い解法はないか、とたえず研究をつづける心掛けが必要である。

（この後は、レベルの高い内容や、余り興味を引かない内容のため、テーマのみ紹介する。）

将棋盤のぬりわけ問題

占数術か、物理学の革命か

公式集の誤りについて

一般教養の数学

《目覚ましの問題》

(答)　（早わざ）　$x = y = z = 1$ とすれば、$(2/3)\times 3 = \underline{2}$

　（くそ真面目に）

（解１）与式 $= \dfrac{2x}{xy+x+1} + \dfrac{2y}{(1/x)+y+1} + \dfrac{2(1/(xy))}{(1/y)+(1/(xy))+1} = \dfrac{2x+2xy+2}{xy+x+1} = \underline{2}$

（解２）与式 $= \dfrac{2x}{xy+x+1} + \dfrac{2xy}{xyz+xy+x} + \dfrac{2xyz}{x^2yz+xyz+xy} = \dfrac{2x+2xy+2}{xy+x+1} = \underline{2}$