

本棚にあった、30代半ばに手にした本です。奥付によると、昭和49年10月20日第1刷発行、昭和53年10月20日第9刷発行となっています。拾い読みで紹介します。一般の読者向けなのか、証明はなく、適当につけてみたが、中にはあきらめたものもあり、参考資料やお気づきの点などがあれば教えてください。よろしく。

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

----- <問題と考察など> -----

III 超越数 e

(本では 数学の基本定数として、 π と黄金比、そして3番目に重要な定数として e をあげており、次の2つを紹介している。)

A (連分数による)

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{3}{4 + \dots}}}}$$

B (級数展開による)

$(1 + \frac{1}{n})^n$ を展開すると、次のような収束する無限数列(級数)が得られる。

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

(参考) e^x を展開し $x = 1$ とすればよい。

A は18世紀のスイスの数学者レオンハルト・オイラーが発見したものである。

B の級数展開はよく知られたものであり、A との関連も何とかなると思い取り組んでみたが、結論として、B から A は得られず断念。A の証明など参考になる資料があれば、是非、紹介いただきたい。

以下は、いろいろ考えたことなどを記しました。参考にしてください。

<考察1-連分数表示(1)>

$$\begin{aligned} e &= 2 + e - 2 = 2 + \frac{1}{\frac{1}{e-2}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{-e+3}{e-2}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{3e-8}{-e+3}}} \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{-11e+30}{3e-8}}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{3}{4 + \frac{53e-144}{-11e+30}}}}} \\ &= \dots \quad n + \frac{a_n e + b_n}{a_{n-1} e + b_{n-1}} = n + \frac{n}{n+1 + \frac{a_{n+1} e + b_{n+1}}{a_n e + b_n}} \\ &\quad (n+1) \{a_n e + b_n\} + a_{n+1} e + b_{n+1} = n(a_{n-1} e + b_{n-1}) \quad \therefore \begin{cases} a_{n+1} = -(n+1)a_n + na_{n-1} & a_0 = 1, a_1 = -1, \\ b_{n+1} = -(n+1)b_n + nb_{n-1} & b_0 = -2, b_1 = 3, \end{cases} \\ &\quad a_2 = -2a_1 + a_0 = -2 \cdot (-1) + 1 = 3, \quad a_3 = -3a_2 + 2a_1 = -11, \quad a_4 = -4a_3 + 3a_2 = 53 \quad \dots \\ &\quad b_2 = -2b_1 + b_0 = -2 \cdot 3 - 2 = -8, \quad b_3 = -3b_2 + 2b_1 = 30, \quad b_4 = -4b_3 + 3b_2 = -144 \quad \dots \end{aligned}$$

(漸化式をいろいろやりくりしてみたが、期待する結果が得られず断念した。)

<考察2-連分数表示(2)>

(書店で見かけた本から) 「歴史上の数学者に挑む古典数学の難問101 小野田博一(日本実業出版社)」

$e = 2 + 0.718281828459045\dots$ (を元に電卓(8桁)で計算)

(上記の本の内容)

$$\begin{aligned} e &= 2 + \frac{1}{1+0.3922112} \quad 1 \div 0.7182818 = ? \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+0.5496467}} \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+0.8193501}}} \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+0.638701}}}} \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3+0.6970335}}} \\ &\dots \quad 2:12114116118\dots \end{aligned}$$

(左記を参考にして)

$$\begin{aligned} e &= 2 + \frac{1}{1+0.3922112} \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+0.5496467}} \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3+0.638701}}} \\ &\quad 2 \div 0.5496467 = ? \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{3}{4+0.6970335}}}} \\ &\quad 3 \div 0.638701 = ? \\ &\dots \end{aligned}$$

(本では)このパターン(左)がずっと続くことを示すにはもちろん証明が必要ですがいまは省略します。...

(2通りの連分数表示について証明を試みたができず。残念！)

<e の分数近似> (「数学散歩 VI-4」 π の近似値と同様)

$$e = 2.718281828459045\cdots$$

e より小さければ、分子に 3 を、大きければ 2 を、分母には 1 を加える。

$$\frac{27 \times 3}{10 \times 3} = \frac{81}{30} = 2.7 \quad 2 \text{桁の分数を考えるため、最初の数を } \frac{81}{30} \text{ にした。}$$

$$\frac{84}{31} = 2.709, \frac{87}{32} = \underline{2.71875}, \frac{89}{33} = 2.69696, \frac{92}{34} = 2.705882, \frac{95}{35} = 2.7142857, \frac{98}{36} = 2.72222,$$

2 桁では、 $\frac{87}{32}$ が最も近い。 3 桁では、 $\frac{870}{320} = \underline{2.71875}$ 、 から始めて

$$\frac{872}{321} = 2.7165109, \frac{875}{322} = 2.7173913, \frac{878}{323} = \underline{2.7182662}$$

(本によれば、)

878/323 は分母、分子とも 3 桁以内で e に最も近い値を与え、878、323 と回文になっている。

<確率 $\frac{1}{e}$ の問題> (本の 3 文例の最後の例から)

問題 船の船員が全員 (n 人) が上陸し、酒に酔って帰り、でたらめに寝だなにもぐりこんだ。
少なくとも 1 人の船員は自分の寝だなで眠る確率はいくらか。

(本の解説の概要) ① n 個の順列数は n! ② n 個を並べて「すべて間違えている」順列の数は n! を e で割った数に最も近い整数になる。 ③ 確率は $1/e$ に極めて近くなる。④ 全員が間違えるか、少なくとも一人は正しいかのどちらかだから $1 - 1/e \approx 0.6321$ は少なくとも一人は自分の寝だなに眠る確率で、この値は概略 $2/3$ である。(他に証明などの記述はない。)

(証明の概略) n 人の船員を $a_1, a_2, \dots, a_n$ とし、 a_i が正しい自分の寝だなにもぐる事象

を A_i とする。 確率は $P(A_i) = \frac{1}{n}$ 、 $i \neq j$ として、 $P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{n(n-1)}$

少なくとも一人が自分の寝だなに入る事象は、 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ でその確率は、

$$p = p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n) - (p(A_1 \cap A_2) + \dots + p(A_{n-1} \cap A_n))$$

$$+ \dots + (-1)^{n-1} p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

$$= {}_nC_1 \cdot \frac{1}{n} - {}_nC_2 \cdot \frac{1}{n(n-1)} + {}_nC_3 \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \dots + (-1)^{n-1} {}_nC_n \cdot \frac{1}{n!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots - (-1)^n \frac{1}{n!} \div 1 - \frac{1}{e}$$

(参考)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad x = -1 \text{ とおいて}$$

$$\frac{1}{e} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} + \dots$$

$$1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots - (-1)^n \frac{1}{n!} + \dots$$

<章末から>

(本文から) π と e に関する愉快な小題があるが、数表を使ったり、表計算したりせずに決める方法はよく知られていない。(そこで次の問題)

問題 e と π の e 乗の比と、 π と e の π 乗の比とでは、どちらが大きいだろうか。

やり方はたくさんあるが、その一つを・・・ページに載せている。(答などの記述はない。)

(考察など) 「どちらが大きいだろうか」だから、「比の値」の比較になり、文面は次の(A)、(B)の2通りの解釈ができる。(日本語は難しい?)

(A) $\frac{e^e}{\pi^e} = \left(\frac{e}{\pi}\right)^e$ と $\frac{\pi^\pi}{e^\pi} = \left(\frac{\pi}{e}\right)^\pi$ の大小の比較?

(解) $e < 3 < \pi$ だから $\left(\frac{e}{\pi}\right)^e < 1 < \left(\frac{\pi}{e}\right)^\pi$ (問題の文意はこちらか?)

((A) については上記の通り明らかであるが、次の(B) については、うまい方法が見つからない。分母を払って比較するなどいろいろ考えたが不明。ヒントなどあれば、よろしく。

何か出ないかと願い、常用対数表(ネットで検索して得た)によって直接計算し、比較した。

(B) $\frac{e}{\pi^e}$ と $\frac{\pi}{e^\pi}$ の大小の比較?

(解) $2.71 < e < 2.72$ 、 $3.14 < \pi < 3.15$ だから $0.433 < \log e < 0.435$ 、 $0.496 < \log \pi < 0.499$

$$x = \pi^e, \log x = e \log \pi \text{ より } 1.344 < \log x < 1.35, 21.9 < x < 22.9$$

$$y = e^\pi, \log y = \pi \log e \text{ より } 1.359 < \log y < 1.37, 22.8 < y < 23.5$$

$$0.118 < \frac{e}{\pi^e} < 0.125, \quad 0.133 < \frac{\pi}{e^\pi} < 0.139$$

$$\therefore \frac{e}{\pi^e} < \frac{\pi}{e^\pi}$$