数学散歩　Ⅶ-寄り道　　　　　２０１７．５．　χ　　岐阜市　村山錞司

岐阜市の知の拠点メディアコスモス（市立図書館）で、たまたま手にした本の中に気になったことがありました。紹介しますので気楽にお付き合いください。

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題など＞

【奇妙な問題から】

「**BLEU BACKS 傑作 数学パズル ５０ 小泓（こぶけ）正直**」

問題（テーマ）が５０項目挙げられています。その中から３つ紹介します。

４　　背理法の問題として

問題　素数は無限に存在するでしょうか？

いろいろな本で見かけます。少し気になったことがあるので取り上げました。

３７　素数砂漠

問題　素数が存在しない区間は、最長でどのくらいになるのでしょうか？

前問との関係？

４１　無理数の無理数乗

問題　無理数の無理数乗で有理数となるような数は存在するでしょうか？

（参考）「Ⅵ-4」でふれました。何か不思議な感じの問題です。

【記述に誤りがあり、その分楽しめた？話題から】

２ページにわたって誤りが４箇所あり、気が狂いそうになりました。一緒に楽しんでください。

「**数学が歩いてきた道　志賀浩二　ＰＨＰサイエンス・ワールド新書**」

第1章　深い森へ　　１　円周率π　　円周率πの値に迫る

半径１の円に内接する正ｎ角形の１辺の長さを $S(n)$ とすると、次の関係が成り立つ。

$$S(2n) = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 4 \cdot S(n)^2}}$$

どこがどのように間違っているか、探してください。できれば証明も考えてください。

＜証明など＞

【奇妙な問題から】

４　　背理法の問題として

問題　素数は無限に存在するでしょうか？

素数の個数が有限個で、P を最も大きい素数とする。P！＋ 1 は 2、3、4、・・・、P で割ると 1 余るから、P 以下の素数で割ると 1 余り、P より大きい素数になり矛盾する。したがって素数は無限に存在する。

（気になったこと）　$4! + 1 = 25 = 5^2$、$5! + 1 = 121 = 11^2$、$6! + 1 = 721 = 7 \cdot 103$

私なりに上の３行にまとめたが、下線部が気になり次のように修正しました。如何ですか。

（修正）　P より大きい素数か合成数で、P より大きい素数 P’で割れることになり・・・

＜参考＞ 次に紹介する本に、「素数が無限にある」のサイザックによる証明（2006年に発表され、大激震走る。）が載っていましたので紹介します。

「**ほんとうに使える数学（基礎編）　芹沢光雄　実業の日本社**」

＜準備として＞

２以上の任意の自然数 m に対し、m と m+1 は互いに素、すなわち 1 以外の公約数はない。

（証）m と m+1 が 2 以上の公約数 a をもつならば、m = ab、m+1 = ac（b＜c）となる b、c がある。よって　$1 = (m+1) - m = a(c - b) \geqq a$ で矛盾。

＜本題のサイザックによる証明＞

n を 2 以上の自然数とすると、n を割る素数 p_1 がある。次に、n と n+1 は互いに素だから、n+1 を割る 素数 p_2 は n を割る素数 p_1 とは異なる。

次に、n(n+1) と n(n+1)+1 は互いに素だから、　n(n+1)+1 を割る 素数 p_3 は n(n+1) を割る素数 p_1、p_2 とは異なる。　次に、{n(n+1)}{n(n+1)+1} と {n(n+1)}{n(n+1)+1}+1 は互いに素だから、 {n(n+1)}{n(n+1)+1}+1 を割る素数 p_4 は　　{n(n+1)}{n(n+1)+1} を割る素数 p_1、p_2、p_3 とは異なる。以下、同様に続けることができるので、素数は無限個存在する。

３７　素数砂漠

問題　素数が存在しない区間は、最長でどのくらいになるのでしょうか？

いくらでも長い区間がある。　ｎ！＋２、ｎ！＋３、・・・、ｎ！＋ｎ はいずれも素数でない。

４１　無理数の無理数乗

問題　無理数の無理数乗で有理数となるような数は存在するでしょうか？

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ について

１　　$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数であれば、そのまま成立。

２　　$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が無理数であれば、　$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$（有理数）

(別の例)　無理数 $\log_2 100 = 2\log_2 10$ 、 $\sqrt{2}^{\log_2 100} = 10$ (有理数)

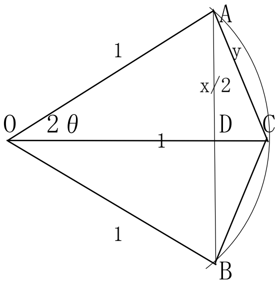
【記述に誤りがあり、その分楽しめた？話題から】

第1章　深い森へ　1　円周率π　円周率πの値に迫る

（概要）　半径１の円の円周の長さは２πだから、πの近似値は（正多角形の周の長さ）／２

《最初の誤り》

半径１の円に内接する正ｎ角形の１辺の長さを S(n) とすると、次の関係が成り立つ。 $S(2n) = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 4\cdot S(n)^2}}$



（誤り発見）

正三角形の場合、
１辺の長さ は$\sqrt{3}$ で
$4 - 4\cdot S(n)^2 = -8$ ？

(吟味)　直接、図形の問題として考える。

半径１の円に内接する正ｎ角形の１辺を AB = S(n) = 2AD = x、

正２ｎ角形の１辺を AC = S(2n) = y (AB と OC の交点を D) 。

△AOC の面積 S を２通りで求める。

$$S = \frac{1}{2}\cdot OC\cdot AD = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2} = \frac{x}{4}$$

$$\text{（ヘロンの公式で）} = \sqrt{\frac{2+y}{2}\cdot\frac{2-y}{2}\cdot\frac{y}{2}\cdot\frac{y}{2}} = \frac{y\sqrt{4-y^2}}{4}$$

$\therefore$　$y^4 - 4y^2 + x^2 = 0$、 $y^2 \leqq 2$ より、 $y^2 = 2 - \sqrt{4 - x^2}$

以上から、　$S(2n) = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \underline{S(n)}^2}}$　（$\underline{4\cdot S(n)}^2$ は誤り）

（本の証明から：本では、∠AOC = 2θ として証明を進めている。）

S(2n) (= AC) = 2 sinθ、S(n) (= AB) = 2 sin 2θとなる。

$2\sin \underline{2\theta} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 4\,\text{siin}^2 2\theta}}$　が成り立つことを示せばよい。

（ここでも、左辺の sin 2θ は誤りで、sin $\underline{\theta}$）

(以下、証明を進めて) 右辺 $= \sqrt{2 - \sqrt{4 - 4\,\text{siin}^2 2\theta}}$ = ・・・ = 2 sin θ (= 左辺)

これを用いてπの値・・・ $\frac{1}{2}$S(n) がπの近似値を与える・・・n = 6 のときの値 <u>S(6) = 6</u> から

出発して、次々と２倍して S(12)、S(24)、S(48)　・・・

(ここでも、$\frac{1}{2}$ <u>S(n)</u> 誤 → $\frac{1}{2}$ <u>nS(n)</u> 、 <u>S(6) = 6</u> 誤 → <u>S(6) = 1</u>)

(電卓を使って、参考としてやってみた。)　　(注　√の屋根── の判読をよろしく。)

S(6) = 1、πの近似値は 6/2 = 3

n = 12、　$6\,S(12) = 6\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) \fallingdotseq 3.105828$

n = 24、　$12\,S(24) = 12\left(\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right) \fallingdotseq 3.1326288$

n = 48、　$24\,S(48) = 24\left(\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\right) \fallingdotseq 3.1393512$

n = 96、　$48\,S(96) = 48\left(\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}\right) \fallingdotseq 3.141048$

n = 192、　$96\,S(192) = 96\left(\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}\right) \fallingdotseq 3.141453792$

n = 384、　$192\,S(384) = 192\left(\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}\right) \fallingdotseq 3.141562368$

(次はS(n)により、表計算を利用したものです。)

n	n/2	√x	S(n)	πの近似値
12	6	1.732050808	0.51763809	3.105828541
24	12	1.931851653	0.261052384	3.132628613
48	24	1.982889723	0.130806258	3.139350203
96	48	1.995717846	0.065438166	3.141031951
192	96	1.998929175	0.032723463	3.141452472
384	192	1.999732276	0.016362279	3.141557608

(本では、π≒$\sqrt{989694}$= 3.14156・・・　　(986994 誤　→ <u>9.89694</u>)

(感想　わずか２ページで４箇所の誤りがあり、何度も思考停止に陥り、現役時代の考査で生徒たちの答案の採点を思い出しています。また、その分、上記のπの近似式の（吟味）を試みることができ楽しめました。