数学散歩　Ⅸ－19　　　　　　　　２０１８．１１．α　　岐阜市　村山錞司

問題づくりの参考に　　：PART　６

「確率・統計　会田・板垣　アレフ社」(大学受験参考書)　その２

シリーズ　数列・級数、整数、空間図形、・・・の中の１冊

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

Ａ　基礎編

（構成）　Ⅰ　順列・組合せ（38 p）　Ⅱ　確率（44 p）

　　　　　Ⅲ　分布（52 p）　　　　　Ⅳ　推測統計の基礎（14 p）

＜問題、解など＞

Ⅰ　順列・組合せ　(2/2)　　（Ⅱ　確率　）

３　組合せ

演習（４）（[15]～[18] から）（[15] は前回のレポート）

> [18] a、a、b、b、c、d、e の 7 個の文字から 4 個とる組合せの数を求めよ。

（略解）　a a b b　1 通り

a a と b c d e から 2 個　${}_4C_2$ = 6 通り

b b と a c d e から 2 個　${}_4C_2$ = 6 通り　　1 + 6 + 6 + 5 = 18 通り　（答）

a b c d e から 4 個　${}_5C_4$ = 5 通り

演習（５）（[19]～[22] から）

> [20]　7 人の選挙人が 3 人の候補者に投票するとき、その結果は何通りの場合があるか。
> 単記記名のときと、単記無記名のときについてしらべよ。

（略解）　7 人の選挙人を A B C D E F G 、3 人の候補者を X Y Z とする。

単記記名　：　7 人それぞれが X Y Z の 3 通りずつの投票をするから、3^7 = 2187 通り。（答）

単記無記名：X Y Z の得票数（総数 7 票）の違いになるから、${}_3H_7$ = ${}_9C_7$ = 36 通り。（答）

7 票の分かれ方		候補者	7 票の分かれ方		候補者
(7 0 0)		3 通り	(4 3 0)	3×2	6 通り
(6 1 0)	3×2	6 通り	(4 2 1)	〃	6 通り
(5 2 0)	〃	6 通り	(3 3 1)		3 通り
(5 1 1)		3 通り	(3 2 2)		3 通り

(X+Y+Z=7 X,Y,Z≧0)

合計　36 通り。

> [22]　6 個のものを 3 つの箱に分けるのに、1 個も入らない箱があってもよいことにして、
> 次の各場合の分け方は何通りあるか。
> ⑴ 6個のものも、3つの箱も区別しない。
> ⑵ 6個のものは区別し、3つの箱は区別しない。
> ⑶ 6個のものは区別せず、3つの箱は区別する。
> ⑷ 6個のものも、3つの箱もともに区別する。

（略解）

⑴ 6 個を 3 つに分ける	⑵ 3 箱の中身を区別	⑶ 3 つの箱から重複	⑷ 6 個のそれ
(6 0 0)	1 通り	3 通り　を許して	ぞれを、
(5 1 0)	${}_6C_5$ = 6 通り	6 通り　6 個とる。	3 つの箱へ
(4 2 0)	${}_6C_4$ = 15 通り　計	6 通り　${}_3H_6$=${}_8C_6$	3^6
(4 1 1)　7 通り	${}_6C_4$ = 15 通り　122 通り	3 通り　=28 通り	= 729 通り
(3 3 0)	${}_6C_3$/2 = 10 通り	3 通り	
(3 2 1)	${}_6C_3$×${}_3C_2$ = 60 通り	6 通り　計	
(2 2 2)	${}_6C_2$×${}_4C_2$ /3！ = 15 通り	1 通り　28 通り	
		（前問の単記無記名）	（単記記名）

⑵について本にあった式について、

$(3^6 - 3)/3! + 1$ = 122 通り。

①　異なる 6 個のものを、異なる 3 つの箱に入れる（3^6）。ただし、(6 0 0) の入れ方 3 通りは除く(-3)。入れ方は、(3^6 − 3)

②　3 つの箱の区別をなくして計算後（○/ 3 !）、(6 0 0) の 1 通りを加える。

Ⅱ　確　率

１　確率の基礎概念

演習（７）（[26]～[31] から）　（演習（６）は略）

> [28] 3 つのサイコロを同時にふるとき、目の和が 9 になる確率と 10 になる確率はどちらが
> 大きいか。

（本によれば、イタリーの賭けごとの好きな貴族が、・・・に気付いて、ガリレイに話したところ
・・・とかという問題とのこと。）

（略解） 3 数の組合せと、出方（目は 1 ～ 6 ）について。目の出方の総数は $6^3 = 216$ 通り

目の和が 9	出方
(6 2 1)	6 通り
(5 3 1)	6 通り
(5 2 2)	3 通り
(4 4 1)	3 通り
(4 3 2)	6 通り
(3 3 3)	1 通り

6×3+3×2+1
= 25 通り

確率は
25/216

目の和が 10	出方
(6 3 1)	6 通り
(6 2 2)	3 通り
(5 4 1)	6 通り
(5 3 2)	6 通り
(4 4 2)	3 通り
(4 3 3)	3 通り

6×3+3×3
= 27 通り

確率は
27/216

（答） 目の和が 10 になる確率の方が大きい。

[29] ⑴ 10 人を 1 列に並べるとき、その中の特定の A と B の間にちょうど 2 人、入る確率を求めよ。
⑵ 1 列に並べる代わりに、円形に並べるときはどうか。

（略解）⑴ ① 10 人を 1 列に並べる。10！ 通り。

② A、B の間に、○、△の 2 人を並べる。A○△B、B○△A で、8×7×2 通り。(10−2=8)

③ 残り 6 人と (A○△B、B○△A) のセット 1 組との 7 人を並べて、(10−4=6)
(8×7×2×7！)／10！＝7／45 （答） 確率は 7／45

⑵ ① 10 人を円形に並べる（円順列） (10 −1)！ 通り。

② A を円周上の 1 点に固定し、A、B の間に残る 8人のうちの○、△の 2人を並べる。
A○△B 、 B○△A で、8×7×2 通り。(10−2=8)

③ 残り 6 人を並べて、(8−2=6) (8×7×2×6！)／9！＝2／9
（答） 確率は 2／9

[30] 1から10までの数字を 1つずつかいた 10枚のカードがある。その中から5枚を手当り次第に抜き出す。それらのカードを数字の小さいものから大きなものへ順に並べたとき、最初から数えて奇数番目のどれかのカードが7である確率を求めよ。

（略解） 10 枚から 5 枚のカードを抜き出す。${}_{10}C_5 = 252$ 通り。
小さい順に並べ、奇数番目（1 番目は不可）が 7 になるから、

A: ○ ○ 7 △ △
1 ～ 6 8～10
${}_6C_2 \times {}_3C_2 = 45$ 通り

B: ○ ○ ○ ○ 7
1 ～ 6
${}_6C_4 = 15$ 通り

（答） 求める確率は
$$\frac{45+15}{252} = \frac{5}{21}$$

[31] n本のクジのうちに r本の当りクジがある。（ n＞r＞0 ） このうちから、n人の人が1本ずつ順にクジを引くとき、何番目に引いても当りクジを引く確率は同じであることを示せ。

(証)(本を参考に) ①n枚の札(クジ)に1～nの数字を書く。1～r (n＞r＞0)を当りとする。
② n 人の人が、1 本ずつ引いたクジを 1 列に並べると、並べ方は n！ 通り。
③ その k 番目に 1～r の番号のカードを、他の n−1 番目のクジはどれでもよいから、
k 番目が当りになる並べ方は、r×(n−1)！

求める確率は $\dfrac{r\times(n-1)!}{n!} = \dfrac{r}{n}$ で同じ。

（上の証明は、それなりに納得しますが、どうも気になって他の方法をやってみました。お時間の許す方はお付き合いください。おかしな点や間違いが一杯ありそうです。ご指摘など是非！！）

＜前提＞ (k−1番目まではいろいろで) k 番目には当りクジを引く確率を f(k) とする。

2、3 の例をあげる。f(1) = **r/n** 、 f(2) = {r(r−1)+(n−r)r} / n(n−1) = **r/n**

○○○ ×○○ ○×○ ××○

$f(3) = \{r(r-1)(\underline{r-2})+(\underline{n-r})r(r-1)+r(n-r)(\underline{r-1})+(n-r)(\underline{n-r-1})r\} \,/\, n(n-1)(n-2)$

$(= \{r(r-1)(r-2)+{}_2C_1(n-r)r(r-1)+(n-r)(n-r-1)r\}/n(n-1)(n-2)\})$

$= \{r(r-1)(\underline{r-2+n-r})+r(n-r)(\underline{r-1+n-r-1})\} \,/\, n(n-1)(n-2)$

$= \{r(r-1)(\underline{n-2})+r(n-r)(\underline{n-2})\}/n(n-1)(\underline{n-2}) = f(2) =$ **r/n** （できれば、f(4)、f(5) も…）

一般化してみる。（判読をよろしく） ${}_kC_0 = 1$ を略すことがある。

$f(k) = \{{}_{k-1}C_0\,\underline{r\ (r-1)\cdots(r-k+1)} + {}_{k-1}C_1\ (n-r)\ r\ (r-1)\cdots\underline{(r-k+2)}$ $(0<k\leqq r)$

k 本すべて当り 最後は当り

$+\ {}_{k-1}C_2\ (n-r)(n-r-1)\ r\ (r-1)\cdots\underline{(r-k+3)} + {}_{k-1}C_3\ (n-r)(n-r-1)(n-r-2)\ r\ \cdots\underline{(r-k+4)}$

$+\ \cdots + {}_{k-1}C_{s-1}\ (n-r)\ \cdots\ (n-r-s+2)\ r\ (r-1)\cdots\underline{(r-k+s)} + \cdots$

$+\ {}_{k-1}C_{k-1}\ (n-r)\ \cdots\ (n-r-k+2)\ \underline{r}\ \} \,/\, n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$

確認として、

$$
\begin{aligned}
f(k+1) = \{ & {}_kC_0\, r(r-1)\cdots(r-k) + {}_kC_1\,\underline{(n-r)}\,r(r-1)\cdots(r-k+1) + {}_kC_2\,\underline{(n-r)}\,\underline{(n-r-1)}\,r(r-1)\cdots(r-k+2)\\
&+ {}_kC_3\,\underline{(n-r)}\,\underline{(n-r-1)}\,\underline{(n-r-2)}\,r(r-1)\cdots(r-k+3) + \cdots\\
&+ {}_kC_\ell\,\underline{(n-r)(n-r-1)\cdots(n-r-\ell+1)}\;r\cdots(r-k+\ell)\\
&+ {}_kC_{\ell+1}\underline{(n-r)(n-r-1)\cdots(n-r-\ell)}\;r\cdots(r-k+\ell+1) + \cdots\\
&+ {}_kC_{k-1}\underline{(n-r)\cdots(n-r-k+2)}\;r(r-1) + \underline{(n-r)\cdots(n-r-k+1)}\;r\,\}/n(n-1)(n-2)\cdots(n-k)
\end{aligned}
$$

(${}_kC_\ell = {}_{k-1}C_{\ell-1} + {}_{k-1}C_\ell$ 、ℓ = 1、2、…を利用して 2 つに分け、前後の2項ずつをまとめる。)

$$
\begin{aligned}
&= \{r(r-1)\cdots(r-k+1)\cdot\underline{(r-k+n-r)}+\cdots + {}_{k-1}C_1(n-r)\;r(r-1)\cdots(r-k+2)\cdot\underline{(r-k+1+n-r-1)}\\
&\quad+\cdots+{}_{k-1}C_\ell(n-r)(n-r-1)\cdots(n-r-\ell+1)\;r\cdots(r-k+\ell+1)\cdot\underline{(r-k+\ell+n-r-\ell)}+\cdots\\
&\quad+(n-r)\cdots(n-r-k+2)\;r\;\underline{(r-1+n-r-k+1)}\}/n(n-1)(n-2)\cdots\underline{(n-k)}\\
&= \{r(r-1)\cdots(r-k+1)\cdot\underline{(n-k)}+\cdots+{}_{k-1}C_1(n-r)\;r(r-1)\cdots(r-k+2)\cdot\underline{(n-k)}\\
&\quad+\cdots+{}_{k-1}C_\ell(n-r)(n-r-1)\cdots(n-r-\ell+1)\;r\cdots(r-k+\ell+1)\cdot\underline{(n-k)}+\cdots\\
&\quad+(n-r)\cdots(n-r-k+2)\;r\;\underline{(n-k)}\}/n(n-1)(n-2)\cdots\underline{(n-k)}\\
&=\cdots=f(k)=\cdots=\underline{\mathbf{r/n}}
\end{aligned}
$$

数学的帰納法により $f(k) = \underline{\mathbf{r/n}}$

(k＞r のときが心配！！(問 どんなときですか？) いろいろ試してみた。)

＜例として＞ 5 本中 2 本当りクジ (n = 5、r = 2) 4 番目の人の当る確率 f(4)

○××○、×○×○、××○○、×××○ (○当り、×はずれ)

$$
\begin{aligned}
f(4) &= \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\\
&\quad+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

(一般化を検討)

$$
\begin{aligned}
f(r+2) = \{ & {}_{r+1}C_2\,(n-r)\,\underline{(n-r-1)}\;r\,(r-1)\cdots\underline{1} + {}_{r+1}C_3\,(n-r)(n-r-1)\underline{(n-r-2)}\;r\,(r-1)\cdots\underline{2}\\
&+\cdots+{}_{r+1}C_r\,(n-r)(n-r-1)\cdots(n-2r+1)\;r\;\underline{(r-1)}\\
&+{}_{r+1}C_{r+1}\,(n-r)(n-r-1)\cdots\underline{(n-2r)}\;r\;\}/n(n-1)(n-2)\cdots\underline{(n-r-1)}\\
= \{ & {}_rC_1\,(n-r)\;r\,(r-1)\cdots1\cdot\underline{(n-r-1)} + {}_rC_2\,(n-r)(n-r-1)\;r\,(r-1)\cdots2\cdot\underline{(1+n-r-2)}\\
&+\cdots+ {}_rC_r(n-r)(n-r-1)\cdots(n-2r+1)\;r\cdot\underline{(r-1+n-2r)}\}/n(n-1)(n-2)\cdots\underline{(n-r-1)}\\
= f&(r+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(r+1) = \{ & {}_rC_1\,(n-r)\;r\,(r-1)\cdots\underline{1} + {}_rC_2\,(n-r)\underline{(n-r-1)}\;r\,(r-1)\cdots\underline{2}\\
&+{}_rC_3\,(n-r)(n-r-1)\underline{(n-r-2)}\;r\,(r-1)\cdots3+\cdots\\
&+{}_rC_\ell\,(n-r)(n-r-1)\cdots(n-r-\ell+1)\;r\,(r-1)\cdots\underline{\ell}\\
&+{}_rC_{\ell+1}(n-r)(n-r-1)\cdots\underline{(n-r-\ell)}\;r\cdots(\ell+1)+\cdots\\
&+{}_rC_{r-1}(n-r)\cdots(n-2r+2)\;r\;\underline{(r-1)}+{}_rC_r\,(n-r)\cdots\underline{(n-2r+1)}\;r\;\}/n(n-1)(n-2)\cdots(n-r)
\end{aligned}
$$

(前記の f(k+1) のときと、前後 2 項のやりとりが 1 項ズレる？？)

$$
\begin{aligned}
&= \{{}_{r-1}C_0\;r\,(r-1)\cdots1\cdot\underline{(n-r)}+{}_{r-1}C_1(n-r)r(r-1)\cdots2\cdot\underline{(n-r)}+{}_{r-1}C_2(n-r)(n-r-1)r\cdots3\cdot\underline{(n-r)}\\
&\quad+\cdots+{}_{r-1}C_\ell(n-r)(n-r-1)\cdots(n-r-\ell+1)\;r\cdots(\ell+1)\cdot\underline{(n-r)}+\cdots\\
&\quad+{}_{r-1}C_{r-1}(n-r)\cdots(n-2r+2)\;r\;\underline{(n-r)}\}/n(n-1)(n-2)\cdots\underline{(n-r)}\\
&= \{r(r-1)\cdots1+{}_{r-1}C_1(n-r)\;r\,(r-1)\cdots2+{}_{r-1}C_2(n-r)(n-r-1)\;r\,(r-1)\cdots3\\
&\quad+\cdots+{}_{r-1}C_\ell(n-r)(n-r-1)\cdots(n-r-\ell+1)\;r\cdots(\ell+1)+\cdots\\
&\quad+(n-r)\cdots(n-2r+2)\;r\;\}/n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)=f(r)=r/n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(r+s+1) = \{ & {}_{r+s}C_{s+1}(n-r)\cdots(n-r-s)\;r\,(r-1)\cdots1+{}_{r+s}C_{s+2}\,(n-r)\cdots(n-r-s-1)\;r\cdots2\\
&+{}_{r+s}C_{s+2}\,(n-r)\cdots(n-r-s+2)\;r\cdots3+\cdots+{}_{r+s}C_{s+r-1}\,(n-r)\cdots(n-2r-s+2)\;r\,(r-1)\\
&+{}_{r+s}C_{s+r}\,(n-r)\cdots(n-2r-s+1)\;r\;\}/n(n-1)(n-2)\cdots(n-r-s)\\
= \{ & {}_{r+s-1}C_s\,(n-r)\cdots(n-r-s+1)\;r\,(r-1)\cdots1\cdot(n-r-s)\\
&+{}_{r+s-1}C_{s+1}\,(n-r)\cdots(n-r-s)\;r\,(r-1)\cdots2\cdot(n-r-s)\\
&+{}_{r+s-1}C_{s+2}\,(n-r)\cdots(n-r-s-1)\;r\,(r-1)\cdots3\cdot(n-r-s)+\cdots\\
&+{}_{r+s-1}C_{s+r}\,(n-r)\cdots(n-2r-s+2)\;r\cdots3\cdot(n-r-s)\;\}/n(n-1)(n-2)\cdots(n-r-s)\\
= f&(r+s)=\cdots=f(r)=r/n
\end{aligned}
$$

(感想：分かったような、分からないような、妙な気分です。f(r+3)、f(r+4)、・・・
いろいろ楽しめます。いいｉｄｅａなど ありましたらよろしく。)