数学散歩　Ⅸ－20　　　　　　　　２０１８．１１．β　　岐阜市　村山錞司

問題づくりの参考に　　：PART　６

「確率・統計　会田・板垣　アレフ社」(大学受験参考書)　その３

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

Ａ　基礎編

＜問題、解など＞

Ⅱ　確　率　(A の余事象（補集合）を本では $\overline{A}$ としているが、－がズレるため本報告では A^c とする。なお、混乱を避けるため、事象の C は D にしている。)

１　確率の基礎概念　2/2

＜基本的性質から＞

$0 \leqq P(A) \leqq 1$、$P(\Omega)=1$（Ωは全事象）、$P(\varnothing)=0$（∅は空事象）、

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$、A、B が排反のとき、$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$、$P(A)+P(A^C)=1$

演習（９）([35]～[37] から)　（演習（８）は略)

[37]　A、B を 2 つの事象とする。次の式を証明せよ。

$$P((A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)) = P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$$

（略証）　$(A\cap B)\cap(A\cap B^c) = A\cap(B\cap B^c) = \varnothing$、　$(A\cap B)\cup(A\cap B^c) = A\cap(B\cup B^c) = A$

$P(A) = P(A\cap B)+P(A\cap B^c)$、　$P(A\cap B^c) = P(A)-P(A\cap B)$　同様に $P(B\cap A^c) = P(B) - P(A\cap B)$

また、$(A\cap B^c)\cap(B\cap A^c) = \varnothing$ で $P((A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)) = P((A\cap B^c)+P(B\cap A^c)) = P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$

２　確率の諸定理

⑴　条件つき確率

（具体的な例として）（例１０）　袋の中に 3 個の白球と 2 個の赤球がある。この袋の中から 1 球ずつ 2 回とり出すとき（とり出した球は元に戻さない）、次の確率を求めよ。

⑴　1 回目に赤球が出る　⑵　2 回目に赤球が出る　⑶　1、2 回目ともに赤球が出る

⑷　1 回目にとり出した球が赤であるということが分かったとき、2 回目に赤球が出る。

（略解）　⑴　$\frac{2}{5}$　⑵　$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{2}{5}$　⑶　$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$

⑷　$\frac{1}{4}$　（条件つき確率である。1 回目が赤球だから、2 回目は 4 個中 1 個が赤球）

＜関連事項＞

定義（条件つき確率）　任意の事象 B に対して、$P(A\cap B)/P(A)$ を A が起こったときの B の条件つき確率といい、$P(B|A)$ または $P_A(B)$ で表す。　$P_A(B) = P(A\cap B)/P(A)$

定理８（乗法定理）　$P(A)>0$ のとき、$P(A\cap B) = P(A)\cdot P_A(B)$

（乗法定理から）

$0<P(A)<1$ のとき　$P(B) = P(A)P_A(B) + P(A^c)P_{A^c}(B)$

（証明略）　やれば何とかなります。（ベン図などを利用も）

（一般化して → **全確率の公式**）

A、B、…、D は互いに共通部分がない（排反事象）で、$A\cup B\cup\cdots\cup D = \Omega$（全事象）のとき

任意の事象 X について、　$P(X) = P(A)P_A(X) + P(B)P_B(X)\cdots + P(D)P_D(X)$

（略証）　(右辺) $= P(A\cap X) + P(B\cap X) + \cdots + P(D\cap X) = P(\Omega\cap X) =$ (左辺)

演習（10）([38]～[42] から)

[38]　$P(A)>0$、$P(D)>0$ の とき、⑴を証明せよ。また、⑵は成り立つか。

⑴　$P_D(A\cup B) = P_D(A) + P_D(B) - P_D(A\cap B)$　⑵　$P_A(B) + P_{A^c}(B) = 1$

（略証）⑴　(左辺) $= (P(D\cap(A\cup B))/P(D) = (P(D\cap A)\cup(D\cap B))/P(D)$

$= (P(D\cap A) + P(D\cap B) - P(D\cap(A\cap B))/P(D) = P_D(A) + P_D(B) - P_D(A\cap B) =$ (右辺)

⑵　$P_A(B) + P_{A^c}(B) \neq 1$　の反例あり。

（反例）　さいころを 1 回ふる。A：奇数の目が出る。B：3 以上の大きい目が出る。

A：1、3、5 で、$P(A) = 1/2$、B：3、4、5、6 で、$P(B) = 2/3$、$A\cap B$：3、5、$A^c\cap B$：4、6

A^C:2、4、6 で、　$P_A(B) = P(A\cap B)/P(A) = 2/3$、$P_{A^c}(B) = P(A^c\cap B)/P(A^c) = 2/3$

（参考　$P_A(B) + P_A(B^c) = 1$ は成り立つ。確認をよろしく。）

[39]　1 個の硬貨を 3 回投げるとき、少なくとも 2 回表が出る事象を E、最初に表が出る事象を F とするとき、$P_F(E)$ を求めよ。

（略解）　E：○○○、○○×、○×○、×○○

　　　　　F：○○○、○○×、○×○、○××　　より、$P_F(E) = 3/4$

＜原因の確率（ベーイズ（Bayes）の定理）の例＞

（例11）同一の製品をつくっている A、B、D の 3 つの機械がある。A、B、D はそれぞれ全製品の 30%、25%、45%を生産し、A、B、D の製品中の不良品の割合は、それぞれ 1%、1.2%、2%であったとする。今、全製品中から 1 個の製品をとり出したとき、それが不良品であったという。この製品が A、B、D のそれぞれの機械から生産された確率を求めよ。

（解）A、B、D から生産されたという事象を A、B、D 、不良品であるという事象を E とすると、

$P(A) = 30/100$、$P(B) = 25/100$、$P(D) = 45/100$、$P_A(E) = 1/100$、$P_B(E) = 1.2/100$、$P_D(E) = 2/100$

不良品が A の製品である確率は $P_E(A) = P(E\cap A)/P(E) = P(A)P_A(E)/P(E)$

前掲の「全確率の公式」から X = E とおいて、

$P(E) = P(A)P_A(E) + P(B)P_B(E) + P(D)P_D(E) = 150 / 10000$　　だから

$P_E(A) = P(A)P_A(E)/P(E) = (30/100)(1/100)/(150/10000) = 1/5$、同様に

$P_E(B) = 1/5$、$P_E(D) = 3/5$、

計算式をまとめて、　$P_E(A) = \dfrac{P(A)P_A(E)}{P(A)P_A(E) + P(B)P_B(E) + P(D)P_D(E)}$

これを一般化したのが、「ベーイズ（Bayes）の定理」

⑵　　事象の独立

定理９　　$P(A) > 0$ のとき事象 B が事象 A に対して独立であるための必要十分条件は、

　　　　　$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$　　（本のまま）

（ 2 つの事象 A、B が独立であるための・・・とした方がよいと思うのだが？）

（本ではまた）$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$ が成り立つとき、2 つの事象 A、B は独立である。独立の定義としてもよい。・・・とある。（また）この独立という概念は確率独特のものであるとして、次の例をあげている。

例　1 組のトランプ（ジョーカーを除く） 52 枚から 1 枚ぬいたとき、ハートが出るという事象を H 、キングが出るという事象を K とすると、H と K は独立であるが、ジョーカーを 1 枚加えると、H と K は独立でなくなる。

（略解）(ｼﾞｮｰｶｰを除く) $P(H) = 13/52 = 1/4$、$P(K) = 1/13$、$P(H\cap K) = 1/52 = P(H)\cdot P(K)$ 、独立

(ｼﾞｮｰｶｰあり) $P(H) = 13/53$ 、$P(K) = 4/53$、$P(H\cap K) \neq P(H)\cdot P(K)$ 、独立ではない。

定理10　　A、B が互いに独立な事象であるとき、次の 2 つの事象も独立であることを示せ。

　⑴　　A、B^c　　　　⑵　　A^c、B^c

（略証）　A、B が互いに独立な事象だから、$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

　⑴　　$P(A) = P(A\cap(B\cup B^C)) = P((A\cap B)\cup(A\cap B^C)) = P(A\cap B) + P(A\cap B^C) = P(A)P(B) + P(A\cap B^C)$

　　　　$P(A\cap B^C) = P(A) - P(A)(P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$ ゆえに、A、B^c は独立

　⑵　　$P(A^c\cap B^c) = P((A\cup B)^c) = 1 - P(A\cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A\cap B))$

　　　　　　$= (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(A^c)P(B^c)$　　ゆえに、A^c、B^c　は独立

＜ 3 つの事象 A、B、C の独立＞ ⇔

$P(A\cap B) = P(A)P(B)$、$P(B\cap D) = P(B)P(D)$、$P(D\cap A) = P(D)P(A)$、$P(A\cap B\cap D) = P(A)P(B)P(D)$

演習（11）（[43]～[46] から）

[46]⑴　3 つの事象 A、B、D が独立のとき次式の成立を示せ。$P(A\cap B^c\cap D) = P(A)P(B^c)P(D)$

⑵　サイコロを 2 個投げたとき、第 1、第 2 のサイコロの目が奇数であるという事象をそれぞれ A、B、両方の目の和が奇数であるという事象を D とするとき、A、B、D は 2 つずつは独立であるが、3 つは独立でないことを示せ。

（略証）⑴　　$P(A\cap D) = P(A\cap(B\cup B^c)\cap D) = P(A\cap B\cap D) + P(A\cap B^c\cap D)$

よって、　$P(A\cap B^c\cap D) = P(A\cap D) - P(A\cap B\cap D) = P(A)P(D) - P(A)P(B)P(D)$

　　　　　　$= P(A)(1 - P(B))P(D) = P(A)P(B^c)P(D)$

⑵　　事象 A、B の第 2、1 のサイコロの出る目については不問だから、$P(A) = P(B) = 1/2$

　　また、$P(A\cap B) = 1/4 = P(A)P(B)$　A、B は独立

　　目の和が奇数は、奇数 + 偶数か、偶数 + 奇数だから、$P(D) = (1/2)\times(1/2)\times 2 = 1/2$

　　$P(A\cap D) = P(B\cap D) = 1/4 = P(A)P(D) = P(B)P(D)$　　A、D と B、D はそれぞれ独立

　　$P(A\cap B\cap D) = 0$、$P(A)P(B)P(D) = 1/8$　　　　3 つは独立ではない。

（追加：両方の目の和が偶数であるという事象を E とすれば、A、B、E については？）