数学散歩　Ⅸ－21　　　　　　　　２０１８．１２．α　　岐阜市　村山錞司

問題づくりの参考に　　：PART　６

「確率・統計　会田・板垣　アレフ社」(大学受験参考書)　その４

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

昔のﾚﾎﾟｰﾄですが、「数学散歩　Ｖ-9　２０１７．１．α」の訂正と追加をお願いします。ﾍﾟﾙ方程式の関連事項です。（下記の部分）

$y = a + \dfrac{b}{a+x} = \dfrac{b}{x+a} + a = \dfrac{ax+a^2+b}{x+a}$、　$y = x$　との交点の x 座標は、

$x^2+ax = ax+a^2+b$　、　$x^2 = a^2+b$ より、　$x = \pm\sqrt{a^2+b}$

（訂正）　$y_{n+1} - \sqrt{a^2+b} = \dfrac{b}{y_n+a} + a - \sqrt{a^2+b} = \dfrac{b(\sqrt{a^2+b} - \mathbf{y}_n)}{(y_n+a)(\sqrt{a^2+b}+a)}$

$\therefore \left| y_{n+1} - \sqrt{a^2+b} \right| < \dfrac{b}{4a^2} \cdot \left| y_n - \sqrt{a^2+b} \right|$　　よって、　$y_n \to \sqrt{a^2+b}$

（追加）　19/6 から $19^2-10\cdot6^2=1$、　117/37 から $117^2-10\cdot37^2=1$、　721/228 から $721^2-10\cdot228^2=1$

Ａ　基礎編

＜問題など＞

⑶　　試行の独立

定理11　　(独立試行ーﾍﾞﾙﾇｰｲ(Bernolli)試行)

1 回の試行で事象 E のおこる確率が p、おこらない確率が q (=1-p) であるとき、n 回の独立試行において事象 E がちょうど r 回起こる確率は、${}_nC_r\, p^r q^{n-r}$　(r=0,1,2,…,n) である。

演習 (12) ([47]～[54] から)

[49]　1 つのサイコロを繰返し 10 回投げるとき、1 の目がちょうど 5 回出て、のこりはことごとごとく異なる目が出る確率を求めよ。

[52]　あるゲームで、甲、乙が対戦を繰返し、どちらか先に 4 勝した方を優勝者とし、対戦をうちきるものとする。 1 回の対戦で甲が勝つ確率を p 、乙が勝つ確率を 1-p とする。 5 回以内の対戦で優勝者が決定する確率を求めよ。

[53]　n 回のﾍﾞﾙﾇｰｲ試行中、事象 A が r 回おこったということが分かったとき、その A が i 回目 (i = 1、2、・・・、n) におこる確率を求めよ。

[54]　サイコロを 50 回投げるとき、1 の目が何回出る確率が最も大きいか。

＜解など＞

[49]　サイコロ 10 回、1 の目が 5 回、のこりは異なる目の確率

（解）　${}_{10}C_5 \cdot (5!)/6^5 = 35/69984$

[52]　5 回以内の対戦で優勝者が決定する確率

（略解）（例）　勝：○　　○○○○　　○○○×○

負：×　　　　　　○○×○○

と裏返し　　　　　○×○○○

×○○○○

$p^4 + {}_4C_1\ p^3(1-p)P + (1-p)^4 + {}_4C_1\ (1-p)^3p(1-p) = 1 - 10\ p^2(1-P)^2$　　　（答）

（別解）　5 回対戦して、優勝者が決まらないのは、3 勝 2 敗か、2 勝 3 敗のときで

${}_5C_3\ (\ p^3(1-p)^2 + (1-p)^3p^2\ ) = 10\ p^2(1-p)^2\ (p+1-p) = 10\ p^2(1-p)^2$

求めるのは余事象の確率だから、　$1 - 10\ p^2(1-P)^2$　　（答）

[53]　n 回中 A が r 回おこったと分かったとき、その A が i 回目におこる確率

（略解）事象 A が r 回おこるという事象を E 、その A が i 回目におこるという事象を F とすると 、$P(E) = {}_nC_r\ p^r q^{n-r}$　、E∩F ：i 回目に A が、そして残り r-1 回 A がおこる

$P(E\cap F) = p\cdot {}_{n-1}C_{r-1}\ p^{r-1}q^{n-r}$

$P_E(F) = \dfrac{P(E\cap F)}{P(E)} = \dfrac{{}_{n-1}C_{r-1}\ p^r q^{n-r}}{{}_nC_r\ p^r q^{n-r}} = \dfrac{r}{n}$　　（答）

[54]　サイコロを 50 回投げるとき、1 の目が何回出る確率が最も大きいか。

（略解）1 の目が r 回出る確率を f(r) とすると、$f(r) = {}_{50}C_r(1/6)^r(5/6)^{50-r}$

$$\frac{f(r+1)}{f(r)} = \frac{{}_{50}C_{r+1}(1/6)^{r+1}(5/6)^{49-r}}{{}_{50}C_r(1/6)^r(5/6)^{50-r}} = \frac{50-r}{r+1}\cdot\frac{1}{5}、\quad \frac{f(r+1)}{f(r)} - 1 = \frac{45-6r}{5(r+1)}$$

r ≧ 45/6 = 7.5 のとき、f(r) ≧ f(r+1) より　・・・＜f(7)＜f(8)＞f(9)＞・・・

よって、8 回出る確率が最大

＜問題など＞

⑷　期待値

演習 (13)（[55]～[59] から）

[56]　「正しいものには○印を、誤っているものには×印をつけよ」という形式で 5 題の問題が出されていて、5 題とも正解すれば 10 点、4 題なら 5 点、3 題なら 2 点、2 題以下なら 0 点という採点法がとられたとすれば、まったくデタラメに○、×をつけたときの点数の期待値はどうか。

[58]　2 個のサイコロを同時にふり、出た目の最小値を X とするとき、次の問に答えよ。

⑴　X = 2 となる確率を求めよ。

⑵　整数 k を 1 ≦ k ≦ 6 とするとき、X = k となる確率を求めよ。

⑶　X の期待値を求めよ。

[59]　4 つの箱があり、それぞれ 1、2、3、4 の番号がつけられている。 1、2、3、4 の番号つきの 4 枚のカードを 1 つの箱に 1 枚ずつ入れる。ただし、入れる人にはこのカードの番号は分からないものとする。カードの番号と箱の番号が一致すれば 1 つにつき 10 点、一致しなければ 0 点とするとき、この人の得点の期待値はいくつか。

＜解など＞

[56]　○×式で 5 題、正解 5 で 10 点、4 で 5 点、3 で 2 点、以下 0 点、期待値は？

（解）　$10\times{}_5C_5(1/2)^5 + 5\times{}_5C_4(1/2)^5 + 2\times{}_5C_3(1/2)^5 = 55/32$　（答）

[58]　2 個のサイコロをふり最小値をX。⑴ X = 2 の確率 ⑵ X = k の確率 ⑶ X の期待値

（略解）　2 個のサイコロを A、B とし、目の組合せを (a,b) とする。

⑴　X = 2 となるのは、(2,2～6) の 5 通りと、(3～6,2) の 4 通りで、
　確率は (5+4)/36 = 1/4

⑵　X = k となるのは、(k,k～6) の 6-k+1=7-k 通りと、(k+1～6,k) の 6-k 通りで、
　確率は (7-k+6-k)/36 = (13-2k)/36

⑶　k = 1、2、…、6 として確率は、　11/36、9/36、7/36、5/36、3/36、1/36

期待値は $1\times\frac{11}{36} + 2\times\frac{9}{36} + 3\times\frac{7}{36} + 4\times\frac{5}{36} + 5\times\frac{3}{36} + 6\times\frac{1}{36} = \frac{91}{36}$

（参考（本より）　⑵の別解　$(7-k)^2/36 - (6-k)^2/36 = (13-2k)/36$ ）

[59]　4 つの箱とカード、1、2、3、4 の番号。一致すれば 1 つ 10 点。期待値は？

（略解）　4 枚のカードを 1 枚ずつ 4 つの箱に入れる入れ方は 4！= 24 通り。

1 枚のカードの番号が一致

番号 1 が一致　1○○○：(1,3.4,2)、(1,4,2,3) の 2 通り

番号 2,3,4 も同様　　2×4 = 8 通り

2 枚のカードの番号が一致

番号 1,2 が一致 1 2 ○○：(1,2.4,3) の 1 通り

カードの組合せは　${}_4C_2$ = 6 通り　で 6 通り

3 枚のカードの番号が一致（4 枚が一致）　1 通り

期待値は　$10\times\frac{8}{24} + 20\times\frac{6}{24} + 40\times\frac{1}{24} = \frac{240}{24} = 10$　（答）