数学散歩　Ⅸ－12　　　　　　　　　　２０１８．７．β　　岐阜市　村山錞司

問題づくりの参考に　　：PART　５

「整数　板垣・土師　アレフ社」(大学受験参考書　昭和55年5月1日　３版発行 600円) その３

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題など＞

A　基礎編　Ⅲ　素数と素因数分解

(本では) 定義：１より大きい整数で、１とそれ自身以外に正の約数をもたない整数を素数という。

自然数のうちで、１でも素数でもないものを合成数という。

自然数
- 正の約数が１つ……１　　（１の扱いが気になり、まとめてみた。１も約数！！）
- 正の約数が２つ……素数
- 正の約数が３つ以上…合成数

整数 a、b が ab ≠0 で、a、b の最大公約数が 1 のとき、a と b は互いに素であるという。

(「－１」の扱いが、気になるが？)

＜オイラーの関数＞ 自然数 a より小さい自然数のうち、a と互いに素である数の個数は a の関数である。これをオイラーの関数といい、φ(a) で表し、次が成り立つ。

1　p が素数のとき、$\phi(p^k) = p^k\left(1-\dfrac{1}{p}\right)$

2　a、b が互いに素のとき、$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$

3　$a = p^{\alpha}q^{\beta}\cdots r^{\gamma}$ ($p,q,\cdots,r$ は素数、$\alpha,\beta,\cdots,\gamma$ は 0 または正整数) とすると

$$\phi(a) = a\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{r}\right)$$

(１の証明) 1 から p^k までの p^k 個の数から p の倍数 p、2p、・・・・、$p^{k-1}\cdot p$ の p^{k-1} 個の数を除いた個数だから、$\phi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k\left(1-\dfrac{1}{p}\right)$

(本では)・・・一般の場合についてはとくに３がむずかしい。こういった事実があることを知っておくだけにして、これ以上深入りしないことにする。(２、３に替えて次の証明をしてみた。)

２つの素数 p、q ($p \neq q$) について、$\phi(p^kq^h) = \phi(p^k)\phi(q^h)$ が成り立つ。

(証明)　$\phi(p^k)\phi(q^h) = p^k(1-1/p)\,q^h(1-1/q) = p^kq^h - p^{k-1}q^h - p^kq^{h-1} + p^{k-1}q^{h-1}$

1、2、・・・、p^kq^h-1 に p^kq^h を加えた p^kq^h 個から、

p の倍数　p、2p、・・・、p^kq^h　の　$(p^kq^h = p^{k-1}q^h\cdot p)$　$p^{k-1}q^h$ 個 …(ｱ)

q の倍数　q、2q、・・・、p^kq^h　の　$(p^kq^h = p^kq^{h-1}\cdot q)$　p^kq^{h-1} 個 …(ｲ)　を除くと、

pq の倍数 pq、2pq、・・・、p^kq^h　の　$(p^kq^h = p^{k-1}q^{h-1}\cdot pq)$　$p^{k-1}q^{h-1}$ 個　は(ｱ)、(ｲ)の両方にあるから、

$\phi(p^kq^h) = p^kq^h - p^{k-1}q^h - p^kq^{h-1} + p^{k-1}q^{h-1} = \phi(p^k)\phi(q^h)$ が成り立つ。

演習(3)　　(問題　〔１５〕～〔２２〕から (いずれも解は後掲))

〔15〕『2 より大きい任意の偶数は、２つの素数の和として表される』をゴールドバッハの問題といい、現在まだ証明されていない。30 までの偶数について、このことを確かめよ。

〔16〕$x^4 + 4$ が素数となるような整数 x は存在するか。

〔18〕自然数 n

⑴　p を素数、e を正の整数とするとき、$T(p^e)$ を求めよ。

⑵　p、q を異なる素数とし、e、f を正の整数とするとき、$T(p^e\cdot q^f)$ 、$T(p^e)$ 、$T(q^f)$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

＜ガウスの記号：[x] は x を超えない最大の整数を表す＞

〔20〕[x] = 10、[y] = 3、[z] = −2 のとき [x − y + z] のとりうる値はいくらか。

〔21〕次の方程式と不等式を解け。

⑴　$\sqrt{x-[x]} - x = 2$　(1)’　$\sqrt{x-[x]} + x = 2$　⑵　$4[x]^2 - 36[x] + 45 < 0$

((1)’は本の⑴（印刷ミス？）の答に対する問題と思われ、追加した。)

〔22〕次の関数のグラフを $-2 \leqq x < 2$ の範囲でかけ。

⑴　$y = x - [x]$　⑵　$y = x + [2x]$　⑶　$y = [x/3]$　⑷　$y = x^2 - [x^2]$

＜答など＞

〔15〕『2 より大きい任意の偶数は、２つの素数の和として表される』　30 までの偶数では

（略解）１通りだけ $4=2+2$、$6=3+3$、$8=3+5$、$12=5+7$、２通り 10 、14、16、18、20、28
３通り 22、24、26、30 = 7+23、11+19、13+17（確認をよろしく）

〔16〕 x^4+4 が素数となるような整数 x は存在するか。

（略） $x^4+4=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$ 右辺の２項のどちらかを 1 として、$x=\pm 1$ 、素数は 5

〔18〕 ⑴ p を素数、e を正の整数とするとき、$T(p^e)$
⑵ $T(p^e\cdot q^f)$ 、 $T(p^e)$ 、 $T(q^f)$ の間に成り立つ関係式

（解）⑴ $1+e$ ⑵ $T(p^e\cdot q^f)=T(p^e)\cdot T(q^f)$ （詳細は略）

〔20〕 $[x]=10$、$[y]=3$、$[z]=-2$ のとき $[x-y+z]$ のとりうる値はいくらか。

（解） $10\leqq x<11$、$-4<y\leqq -3$、$-2\leqq z<-1$ より $4<x-y+z<7$ ∴ $[x-y+z]=4$、5、6

〔21〕 ⑴ $\sqrt{x-[x]}-x=2$ ⑴' $\sqrt{x-[x]}+x=2$ ⑵ $4[x]^2-36[x]+45<0$

（解） $x=n+\alpha$、$n=[x]$、$0\leqq\alpha<1$ とする。

⑴ $\sqrt{\alpha}-n-\alpha=2$ 、$\sqrt{\alpha}-\alpha=\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})=n+2$ （整数）
$0\leqq\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})<1$ だから
$\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})=n+2=0$ で $n=-2$、$\alpha=0$ よって $x=-2$

⑴' $\sqrt{\alpha}+n+\alpha=2$ 、$\sqrt{\alpha}+\alpha=\sqrt{\alpha}(1+\sqrt{\alpha})=2-n$ （整数）
$0\leqq\sqrt{\alpha}(1+\sqrt{\alpha})<2$ だから $\sqrt{\alpha}+\alpha=0$ 、1
(ｲ) $\sqrt{\alpha}+\alpha=0$ のとき、 $\alpha=0$ 、$n=2$ ∴ $x=2$
(ﾛ) $\sqrt{\alpha}+\alpha=1$ のとき、 $n=1$ 、 $\alpha=(1-\alpha)^2$ 、 $\alpha^2-3\alpha+1=0$
$0\leqq\alpha<1$ より、 $\alpha=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ 、 $x=1+\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}+\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$

以上から、 $x=2$ 、 $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$

⑵ $(2[x]-15)(2[x]-3)<0$ より、 $3/2<[x]<15/2$、
$[x]$ は整数だから、$[x]=2$、3、4、5、6、7 求める範囲は、 $2\leqq x<8$

〔22〕 次の関数のグラフを $-2\leqq x<2$ の範囲でかけ。
⑴ $y=x-[x]$ ⑵ $y=x+[2x]$ ⑶ $y=[x/3]$ ⑷ $y=x^2-[x^2]$

（いずれも図略）

（解）⑴ $-2\leqq x<-1$ のとき $[x]=-2$ ∴ $y=x+2$、 $-1\leqq x<0$ のとき $[x]=-1$ ∴ $y=x+1$、
$0\leqq x<1$ のとき $[x]=0$ ∴ $y=x$、 $1\leqq x<2$ のとき $[x]=1$ ∴ $y=x-1$

⑵ $-2\leqq x<-1.5$ のとき $[2x]=-4$ ∴ $y=x-4$、 $-1.5\leqq x<-1$ のとき $[2x]=-3$ ∴ $y=x-3$、
$-1\leqq x<-0.5$ のとき $[2x]=-2$ ∴ $y=x-2$、 $-0.5\leqq x<0$ のとき $[2x]=-1$ ∴ $y=x-1$、
$0\leqq x<0.5$ のとき $[2x]=0$ ∴ $y=x$、 $0.5\leqq x<1$ のとき $[2x]=1$ ∴ $y=x+1$、
$1\leqq x<1.5$ のとき $[2x]=2$ ∴ $y=x+2$、 $1.5\leqq x<2$ のとき $[2x]=3$ ∴ $y=x+3$、

⑶ $-2\leqq x<0$ のとき、$-2/3\leqq x<0$ 、$[x/3]=-1$ ∴ $y=-1$
$-0\leqq x<2$ のとき、$0\leqq x<2/3$ 、$[x/3]=0$ ∴ $y=0$

⑷ y 軸対称
$-1<x<1$ のとき、$[x^2]=0$ ∴ $y=x^2$ $-\sqrt{2}<x\leqq -1$、$1\leqq x<\sqrt{2}$ のとき、$[x^2]=1$ ∴ $y=x^2+1$
$-\sqrt{3}<x\leqq -\sqrt{2}$、$\sqrt{2}\leqq x<\sqrt{3}$ のとき、$[x^2]=2$ ∴ $y=x^2+2$
$-2<x\leqq -\sqrt{3}$、$\sqrt{3}\leqq x<2$ のとき、$[x^2]=3$ ∴ $y=x^2+3$ $x=-2$ のとき、 $y=0$